Université de Haute Alsace, Faculté des Sciences et Techniques
L2 Math

Examen de rattrapage de Math3.3 (Espaces métriques)
22/01/2007 — Durée 3 heures

Questions de cours (*4 points*). 1. Soit (E,d) un espace métrique. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Compléter les définitions suivantes

- $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \cdots$
- A est un voisinage de $a \Longleftrightarrow \cdots$
- A est ouvert $\Longleftrightarrow \cdots$
- A est complet $\Longleftrightarrow \cdots$
- A est compact $\Longleftrightarrow \cdots$

2. Soit $f_n : X \to E$ une suite d'applications définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique E. Soit $f : X \to E$ une application. Compléter les définitions suivantes

- La suite f_n converge simplement vers $f \Longleftrightarrow \cdots$
- La suite f_n converge uniformément vers $f \Longleftrightarrow \cdots$
- La suite f_n est uniformément de Cauchy $\Longleftrightarrow \cdots$

Exercice 1 (*5 points*). Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

sont des normes sur E.
Sont-elles équivalentes ? Que pouvez-vous en déduire sur la dimension de E ?

Exercice 2 (*5 points*). On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
La propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'$ est-elle satisfaite ?

Exercice 3 (*3 points*). Les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont-elles fermées ? bornées ? complètes ? compactes ? (*il faut justifier la réponse*)

$$\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}, \qquad [0,1].$$

Exercice 4 (*3 points*). Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que toute suite convergente dans E est bornée.