Université de Haute Alsace

FST- L2 Math. - S4

Année universitaire 2005-2006

Partiel de Mathématiques - Séries (3h00)

(La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies)

Questions de cours :

1) Donner les définitions de la convergence et de la convergence absolue, d'une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$, où $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2) Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où u_n et v_n sont des éléments d'une algèbre normée.

3) Soient X un ensemble et soit E un espace normé complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : X \to E$. Donner les définitions des notions de converge simple, de convergence uniforme et de convergence normale de la série $\sum f_n$. Quelles sont toutes les implications entre ces notions?

4) Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : I \to \mathbb{R}$. Donner des conditions suffisantes pour que l'on ait

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Exercice 1 :

Étudier la nature des integrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x\sin^2 x}, \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad I_4 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\sin x dx.$$

Exercice 2 :

Soit l'intégrale impropre suivante : $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$

1) Vérifier que $B(x,y) = B(y,x)$.

2) Montrer que l'intégrale $B(x,y)$ a un sens si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

3) Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (*Indication : utiliser le changement de variable* $t = \sin^2 x$).

Exercice 3 :

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série à termes positifs qui supposée convergente.

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$.

2) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \sqrt{u_p}$. Montrer que $S_n \le M\sqrt{n}$, où M est une constante à déterminer.

[Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schartz $\sum_1^n a_i b_i \leq (\sum_1^n a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_1^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$].

3) Soit $\sigma_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\sqrt{u_p}}{p^\alpha}$

a) Vérifier que

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) S_1 + ... + \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) S_{n-1} + \frac{S_n}{n^\alpha},$$

en déduire que

$$\frac{\sigma_n}{M} \leq \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + ... + \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n-1}}{n^\alpha}.$$

b) Montrer que la série de terme général $\beta_n = \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) \sqrt{n}$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Déduire de a) et b), que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 4 :

Soit $(f_n(x))_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$.

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$.

2) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.

3) En utilisant les questions précedentes, Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) = 1 - \frac{1}{e}.$$

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la série de fonctions de terme général défini par

$$f_n(x) = nx^\alpha e^{-nx},$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Déterminer les α tels que la série $\sum f_n$ soit normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $\beta > 0$. Prouver que la série $\sum f_n$ converge normalement et uniformément sur $[\beta, +\infty[$.

Exercice 6 :

Soit $T_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx}$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Prouver que la fonction T_n est dérivable et que l'on a $T_n'(x) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} ke^{-kx}$. En déduire une expression simple de la fonction $\sum_{k=n+1}^{+\infty} ke^{-kx}$.