

Equations différentielles

CIMPA Tlemcen 2008

Eric Benoît*

29 Avril 2008

Dans ce cours, on va étudier les équations différentielles ordinaires (parfois aux dérivées partielles) uniquement dans la perspective de pouvoir appliquer cette théorie à des problèmes d'évolution d'un système. Ce point de vue a quelques conséquences importantes sur la façon de voir les choses. La première, qui semble anodine est que la variable fondamentale est le temps t . C'est un nombre entier (mesuré en secondes, en années, ou ...) ou un nombre réel (les nombres complexes ne sont d'aucun usage à cet endroit). On notera systématiquement avec un point la dérivée par rapport au temps : $\dot{\phi}$ a le même sens que $\frac{d\phi}{dt}$.

1 Récurrence discrète et équation différentielle

Le but de la théorie mathématique que nous cherchons à construire est l'étude de l'évolution d'un système. Précisons : on appelle ici "système" un ensemble de variables physiques ou chimiques ou biologiques ou économiques ou ... liées par des interactions, et (relativement) isolé du reste du monde. On décrit l'ensemble des variables de ce système à l'instant t par un élément de $\mathbb{R}^n$ ou parfois un objet mathématique plus compliqué (hors programme). On le notera $x(t)$ et on l'appellera *état du système* à l'instant t .

1.1 Loi de transition : récurrence

Exemples

- Mon compte en banque : notons $x(t)$ le solde le premier janvier de l'année t . Alors, si je ne fais ni versement ni retrait sur ce compte, on a $x(t+1) = (1+r)x(t)$, où r est le taux d'intérêt annuel versé par la banque. Le solde initial, au premier janvier de l'année 0 est supposé connu. Le problème mathématique s'écrit donc

$$\begin{cases} x(t+1) &= x(t) + rx(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

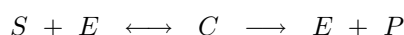
et consiste à déterminer $x(t)$. Ici, le problème est trivial : $x(t) = (1+r)^t x_0$.

- Une population : notons $x(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t . Notons r son taux de croissance annuel (taux de natalité diminué du taux de mortalité). On a exactement la même équation que ci-dessus. On constate cependant que le taux de croissance r n'est pas le même quand la densité de population est importante. On dit qu'il est densité-dépendent. On a alors une équation plus générale :

$$\begin{cases} x(t+1) &= x(t) + r(x(t)) x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}.$$

Même avec une fonction $r(x)$ très simple, on ne peut plus trouver de formule qui "résolve" cette récurrence.

- Une réaction chimique : un substrat S (de concentration x_1) se lie à une enzyme E (de concentration x_2) pour donner un complexe C (de concentration x_3). Cette réaction est réversible. De plus, le complexe put se décomposer en un produit P (de concentration x_4) en redonnant l'enzyme.



*projet COMORE, INRIA Sophia-Antipolis, et Université de La Rochelle courriel : ebenoit@univ-lr.fr

On peut raisonnablement supposer que la vitesse de la réaction $S + E \rightarrow C$ est proportionnelle au nombre de rencontres entre les molécules S et les molécules E . Ce nombre de rencontres est proportionnel aux concentrations. On a donc supposé que la vitesse de cette réaction s'écrit kx_1x_2 . Le nombre de molécules C qui se décomposent par unité de temps en $S + E$ est de la même façon proportionnel à la concentration x_3 . On en déduit une récurrence permettant de calculer les concentrations après un intervalle de temps δt :

$$\begin{cases} x_1(t + \delta t) &= x_1(t) + [-kx_1(t)x_2(t) + \alpha x_3(t)] \delta t \\ x_2(t + \delta t) &= x_2(t) + [-kx_1(t)x_2(t) + (\alpha + \beta)x_3(t)] \delta t \\ x_3(t + \delta t) &= x_3(t) + [kx_1(t)x_2(t) - (\alpha + \beta)x_3(t)] \delta t \\ x_4(t + \delta t) &= x_4(t) + [\beta x_3(t)] \delta t \end{cases}$$

L'écriture générale est $x(t + \delta t) = f(x(t))$, avec $x(t_0)$ état initial donné. Un cas particulier est celui où f est linéaire : on a alors $x(t + 1) = Ax(t)$ où A est une matrice.

1.2 Discussion : discret ou continu ?

Il arrive très souvent que la récurrence établie soit du type

$$x(t + \delta t) = x(t) + f(x(t))\delta t.$$

Pour vous en convaincre, voyez les exemples ci-dessus. Cette transition s'écrit aussi

$$\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} = f(x(t))$$

et il est très tentant de remplacer cette formule par

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

qu'on écrit de façon plus concise

$$\dot{x} = f(x)$$

L'exemple précédent de dynamique de population donne alors l'équation différentielle $\dot{x} = r(x)x$. L'avantage de cette écriture est que, contrairement au système discret ci-dessus, il existe une solution "explicite" à cette équation. J'écris "explicite", car le calcul exige une primitive et une inversion de fonction. En fait, dès que x est de dimension 1, c'est le cas car

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \iff \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(\xi)} d\xi = t - t_0$$

Cette remarque permet de comprendre que, modéliser un système réel par une équation différentielle permet d'utiliser une théorie mathématique plus efficace, avec parfois des expressions explicites, alors que modéliser par une récurrence n'exige que très peu de résultats théoriques, mais ne permet pas de faire des calculs, seulement des simulations.

Parmi les méthodes remarquablement efficaces (bien plus qu'on ne le croit généralement), figure le changement de variables. Il se pratique de la façon suivante (voir exercices) où il est recommandé d'écrire l'ancienne variable en fonction de la nouvelle et non le contraire :

$$\dot{x} = f(x) \rightsquigarrow x = \varphi(y) \rightsquigarrow \dot{y} = (D\varphi(y))^{-1} \cdot f(\varphi(y))$$

1.3 Equations d'ordre supérieur, équations non autonomes

1.3.1 Equations d'ordre supérieur

Dans certaines modélisations, il est naturel d'introduire la dérivée seconde $\ddot{x}$. C'est principalement le cas en mécanique où la loi fondamentale exprime l'accélération $\ddot{x}$ en fonction de la position et parfois de la vitesse. Nous ne traiterons pas ce cas dans la suite du cours pour deux raisons : la première est que, dans les modèles qui nous intéressent, la dérivée seconde apparaît rarement. La seconde, encore plus radicale, est qu'un système d'ordre deux se ramène sans mal à un système d'ordre 1 par l'artifice suivant :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$$

1.3.2 Equations non autonomes

Il peut aussi arriver que le temps t intervienne directement dans l'équation qui s'écrit alors $\dot{x} = f(t, x)$. On dit alors que l'équation (ou le système) est non autonome. Ce sera le cas par exemple si le système considéré dépend de paramètres saisonniers comme la température ou l'hygrométrie. Le modèle peut aussi dépendre d'une fonction $u(t)$ contrôlée par l'utilisateur (par exemple le débit de sortie d'un barrage). Cette situation produit des problèmes très riches...

Cependant, dans un certain nombre de cas, on pourra considérer qu'une équation différentielle non autonome est équivalente à une équation différentielle autonome par l'artifice suivante :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tau} = 1 \\ \dot{x} = f(\tau, x) \end{cases} \quad (\tau, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

1.4 Théorème d'existence et d'unicité

Ce paragraphe constitue la partie la plus mathématique de ce cours. Il s'agit de bien comprendre le théorème suivant (qu'on peut lire en ignorant les notes de bas de page, si on accepte de renoncer à une rigueur mathématique qu'on jugerait superflue).

Théorème 1 Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que f est continue, et localement lipschitzienne* par rapport à sa deuxième variable x . Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. Alors il existe une unique solution maximale† au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Preuve (schéma de) On choisit un pas de temps δt infinitésimal positif. On construit la suite de points (t_n, x_n) par récurrence avec l'algorithme d'Euler :

$$t_{n+1} = t_n + \delta t \quad x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\delta t \quad \text{tant que } f(t_n, x_n) \text{ est défini}$$

On relie ces points par des segments pour avoir une fonction continue affine par morceaux notée ξ . On montre ensuite que, tant‡ que $(t, \xi(t))$ est presque standard dans U , on a

$$\dot{\xi}(t) - f(t, \xi(t)) \simeq 0$$

On montre ensuite que $(t, \xi(t))$ est presque standard dans U au moins tant que t est infinitésimal. On en déduit que c'est encore vrai sur un intervalle I de longueur non infiniment petite. On en déduit que ξ a une dérivée limitée donc est S -continue sur I , et admet une ombre notée x . On montre ensuite que x est la solution locale de l'équation différentielle.

On peut, en entrant plus précisément dans les concepts de l'analyse non standard donner une preuve rigoureuse du théorème. Pour une démonstration classique (standard) exploitant rigoureusement les idées ci-dessus, voir l'annexe à la fin de ce polycopié. ■

Théorème 2 (de prolongement) Une solution maximale $x(t)$ d'un système $\dot{x} = f(x)$ est définie sur un intervalle $]a, b[$ tel que

- Soit $a = -\infty$, soit $\lim_{t \rightarrow a} x(t) = \infty$.
- Soit $b = \infty$, soit $\lim_{t \rightarrow b} x(t) = \infty$.

2 Comportement qualitatif des solutions

Dans ce chapitre, on suppose donné un système de dimension n (on prendra très souvent $n = 2$ dans ce cours). Dans la plupart des cas, il est impossible de donner une forme explicite des solutions. Cependant, et c'est le but de ce chapitre, on pourra analyser avec plus ou moins de précision le comportement des solutions. Ces études n'utilisent que peu de théorèmes, mais elles exigent un doigté, de l'astuce et une maîtrise du sujet qui font souvent peur aux débutants. Certains points de ces études sont pourtant très faciles...

* $\forall (t_0, x_0) \in U, \exists V$ voisinage de $(t_0, x_0), \exists K, \forall (t, x, y), [(t, x) \in V, (t, y) \in V] \Rightarrow \|f(t, y) - f(t, x)\| < K\|y - x\|$

†Une solution est dite maximale si elle n'est pas la restriction d'une autre solution.

‡L'expression *tant que* est un résumé très agréable d'une formule plus compliquée :

$$\text{tant que } \mathcal{L}(t), \text{ on a } \mathcal{P}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \{[\forall s \leq t \quad \mathcal{L}(s)] \implies \mathcal{P}(t)\}$$

2.1 Points stationnaires

Quand on s'intéresse à l'évolution naturelle d'un système, la première question naturelle qui vient à l'esprit est de savoir si ce système peut rester immobile. Pour une dynamique de populations par exemple, on veut savoir si les effectifs peuvent être constants. La condition mathématique est évidente :

Définition 1 Un point x^* est dit point stationnaire (ou équilibre) de l'équation $\dot{x} = f(x)$ si et seulement si $f(x^*) = 0$.

Exemples

- L'équation $\dot{x} = x(1 - x)$ possède deux points stationnaires $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$.
- L'équation du pendule $\ddot{x} = \sin x$, qui s'écrit aussi $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin x$ possède deux points stationnaires : $(x = 0, y = 0)$ et $(x = \pi, y = 0)$. (rappelons que x est défini modulo 2π)

Dans l'exemple du pendule ci-dessus, vous savez bien que l'équilibre $x^* = 0$ (en bas) et l'équilibre $x^* = \pi$ (en haut) n'ont pas du tout le même statut. La notion de stabilité précise cela :

Définition 2 Un point stationnaire standard x^* de l'équation standard $\dot{x} = f(x)$ est asymptotiquement stable si et seulement si toute solution $x(t)$ issue d'un point $x(0)$ infiniment proche de x^* reste infiniment proche de x^* pour tout t positif, et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$.

Définition 3 Soit x^* un point stationnaire de l'équation $\dot{x} = f(x)$. On dit que x^* est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout ε positif, il existe η positif tel que pour toute condition initiale x_0 vérifiant $\|x_0 - x^*\| < \eta$, la solution issue de x_0 vérifie

$$\forall t > 0 \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

Définition 4 Soit $\dot{x} = f(x)$ un système et x^* un équilibre. Une fonction V de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite fonction de Lyapounov si et seulement si

$$V(x^*) = 0, \quad V(x) > 0 \text{ pour } x \neq x^*, \quad \text{et} \quad \nabla V \cdot f < 0 \text{ sauf en } x^*$$

Théorème 3 Un point stationnaire x^* est asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction de Lyapounov.

Preuve :

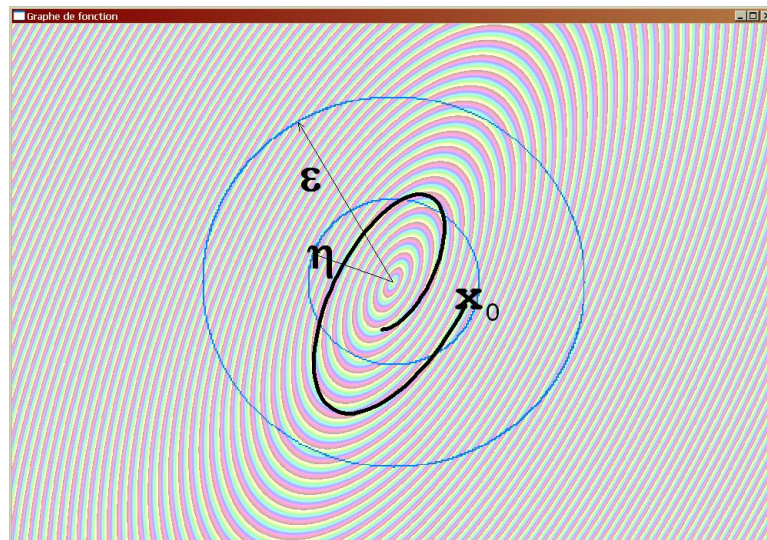


Figure 1: Courbes de niveau d'une fonction de Liapounov, et stabilité de l'équilibre.

Un premier cas intéressant à étudier est celui de la stabilité de l'origine pour un système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax$. On sait résoudre de tels systèmes (voir exercice). Et on en déduit (voir exercice) la proposition suivante:

Proposition 4 • Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative, alors l'origine est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation $\dot{x} = Ax$.

- Si l'une des valeurs propres de A a une partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas asymptotiquement stable.

Linéarisation : Soit $\dot{x} = f(x)$ un système différentiel et x^* un équilibre. On veut étudier le comportement du système pour x proche de x^* . Pour cela, le plus simple est de faire d'abord un changement de variables $x = x^* + y$ pour déplacer le point d'étude à l'origine. Cela donne le nouveau système $\dot{y} = f(x^* + y)$. Ensuite, il est naturel de faire un développement de Taylor de f au voisinage de x^* qui donne $\dot{y} = Ay + O(y^2)$ où A est la matrice jacobienne de f au point x^* . Supposons que A ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction de Liapounoc pour le système linéarisé. On montre sans mal que cette fonction est encore, au moins localement, une fonction de Liapounov pour le système en y . On en déduit le théorème fondamental suivant:

Théorème 5 Soit x^* un équilibre du système $\dot{x} = f(x)$. Soit J la matrice jacobienne de f au point x^* , c'est-à-dire $J_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)$.

- Si toutes les valeurs propres de la matrice J sont à partie réelle strictement négative, alors x^* est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation $\dot{x} = f(x)$.
- Si l'une des valeurs propres de J a une partie réelle strictement positive, alors x^* n'est pas asymptotiquement stable.

2.2 Variétés stable et instable

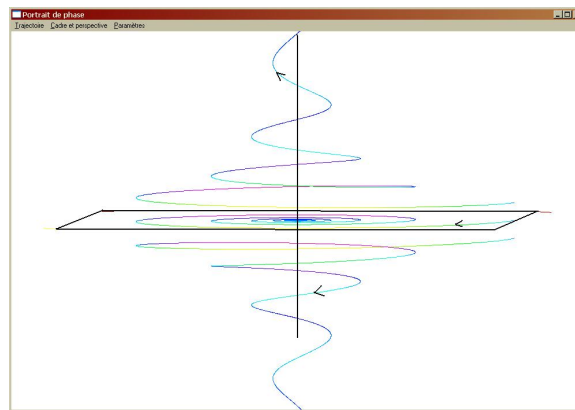


Figure 2:

fig:Wus

Observons la figure 2 d'un système de $\mathbb{R}^3$: il s'agit d'un point d'équilibre où les valeurs propres de la matrice jacobienne sont $-\frac{1}{10} - i$, $-\frac{1}{10} + i$ et $\frac{1}{10}$. L'observation qui est l'idée de base du théorème de la variété stable est la suivante : il existe une surface (de dimension 2, comme le nombre de valeurs propres à partie réelle strictement négative) constituée de trajectoires de l'équation qui convergent vers le point d'équilibre. Cette surface s'appelle la variété stable de x^* . On observe de même une courbe (de dimension 1, comme le nombre de valeurs propres à partie réelle strictement positive) constituée de trajectoires de l'équation qui "proviennent" du point d'équilibre. Cette courbe s'appelle la variété instable de x^* . Ces variétés stable et instable, ainsi que la célèbre variété centrale (un peu plus délicate à définir) sont essentielles pour structurer l'espace $\mathbb{R}^n$ de façon intelligente pour permettre l'étude qualitative des solutions.

2.3 Cycles

La figure ci-dessous montre quelques trajectoires de l'équation de van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= -x \end{cases}$$

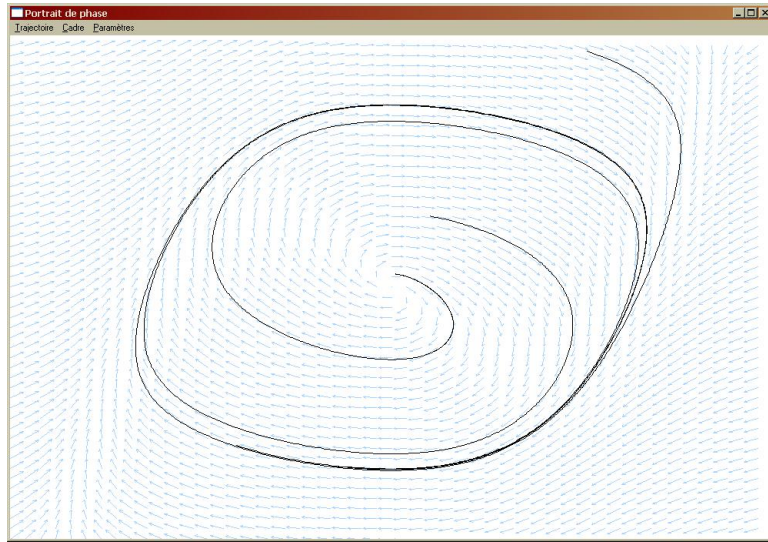


Figure 3: Quelques trajectoires de l'équation de van der Pol.

On y observe que l'origine est un point d'équilibre instable, et surtout, on observe que toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire périodique.

Définition 5 Un cycle est une trajectoire périodique, c'est-à-dire une solution $x(t)$ périodique.

Un cycle est dit asymptotiquement stable si pour tout voisinage V_ε de ce cycle, il existe un voisinage V_η de ce cycle tel que, pour toute condition initiale x_0 dans V_η , la trajectoire $x(t)$ issue de x_0 d'une part ne sort jamais (pour $t > 0$) de V_ε , et d'autre part converge vers la solution périodique.

Sur un schéma, on observe facilement les cycles, mais il est souvent plus délicat d'évaluer la période, car le temps t ne figure pas sur ces dessins.

Illustration : la bifurcation de Hopf On se donne une famille à un paramètre de systèmes différentiels $\dot{x} = f(x, a)$. La résolution de l'équation $f(x, a) = 0$ donne les points stationnaires. Si la jacobienne $\partial f / \partial x$ est inversible, on peut (théorème des fonctions implicites) écrire localement cet équilibre comme une fonction de a . On peut, pour chaque valeur de a calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne pour étudier la stabilité de $x^*(a)$. Supposons que, pour $a < 0$, ces valeurs propres soient à partie réelle négative, et que pour $a > 0$ ce ne soit plus le cas. Alors, vu nos hypothèses, les deux valeurs propres sont imaginaires pures conjuguées et traversent l'axe imaginaire pour $a = 0$. L'équilibre $x^*(a)$ est asymptotiquement stable pour $a < 0$ puis instable pour $a > 0$.

Dans cette situation, on montre que des cycles apparaissent. Génériquement, deux cas se présentent :

- Bifurcation de Hopf super-critique : il y a un cycle asymptotiquement stable pour les valeurs positives de a .

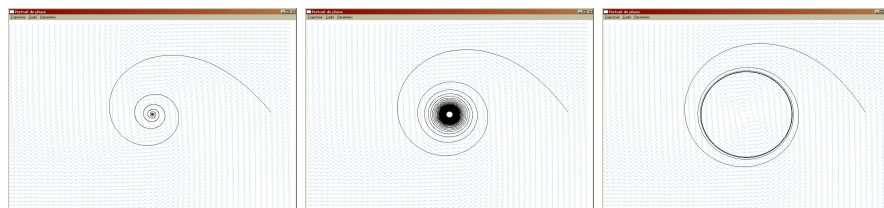


Figure 4: $a = -0.1$

$a = 0$

$a = 0.1$

Remarque : le petit trou blanc sur la figure $a = 0$ est dû au fait que la trajectoire n'a été tracée que jusqu'à un temps T , certes grand, mais pas infini. Or pour cette valeur du paramètre, l'origine est asymptotiquement stable, mais la vitesse de convergence est très lente.

- Bifurcation de Hopf sous-critique : il y a un cycle négativement asymptotiquement stable pour les valeurs négatives de a . Le schéma est obtenu à partir du précédent en changeant les signes de a et de t .

2.4 Attracteurs

En dimension supérieure, les cycles ne sont pas si facilement observables. La dimension 2 est particulièrement favorable grâce au théorème de Poincaré-Bendixon qui assure qu'une trajectoire d'un système différentiel n'a qu'un nombre très restreint de comportements possibles pour t tendant vers l'infini, à savoir

- Partir à l'infini.
- Converger vers un équilibre (stable ou non).
- Converger vers un cycle stable.
- Converger vers un polycycle.

Seul le dernier cas mérite explication, et un dessin vaut mieux que des formules : voir la figure 5 où le polycycle est le carré constitué de quatre trajectoires reliant quatre points stationnaires entre eux.

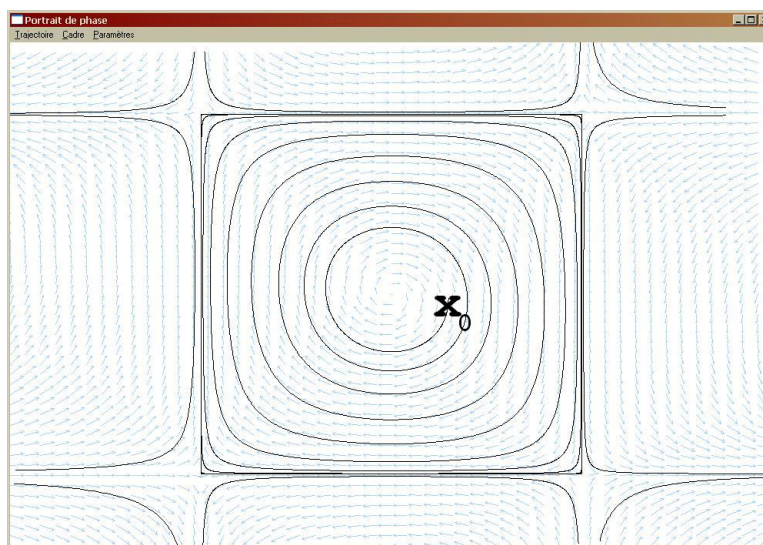


Figure 5: Quelques trajectoires de $\dot{x} = (1 - x^2)(y + \frac{1}{10}x)$, $\dot{y} = x(1 - y^2)$.

[fig:polycycle](#)

En dimension supérieure à 2, les choses sont beaucoup plus compliquées. On définit le "bout" de la trajectoire ainsi :

Soit $\dot{x} = f(x)$ un système différentiel, et x_0 une condition initiale. On note $x(\cdot)$ la solution issue de x_0 . L'ensemble $x([t, +\infty[)$ est obtenu en ne traçant la trajectoire qu'à partir de l'instant t . On voudrait alors définir le "bout" de la trajectoire par la formule

$$\bigcap_{t \in [0, +\infty[} x([t, +\infty[)$$

. Cette définition purement ensembliste n'est pas satisfaisante : elle oublie la notion de proximité et de convergence. Par exemple, si une trajectoire converge vers un point d'équilibre, l'ensemble défini ci-dessus est vide, alors qu'on aurait voulu obtenir le point limite.

Définition 6 *L'ensemble ω -limite de la trajectoire est*

$$\bigcap_{t \in [0, +\infty[} \overline{x([t, +\infty[)}$$

. où la barre désigne l'adhérence topologique.

Dans tous les cas étudiés ci-dessus, l'ensemble ω -limite est soit un point stationnaire, soit un cycle, soit un polycycle. Cependant, cela peut-être beaucoup plus compliqué comme l'illustre ci-dessous le système (dit de Lorenz) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 - xy \\ \dot{y} &= yz - x \\ \dot{z} &= xz - x - y \end{cases}$$

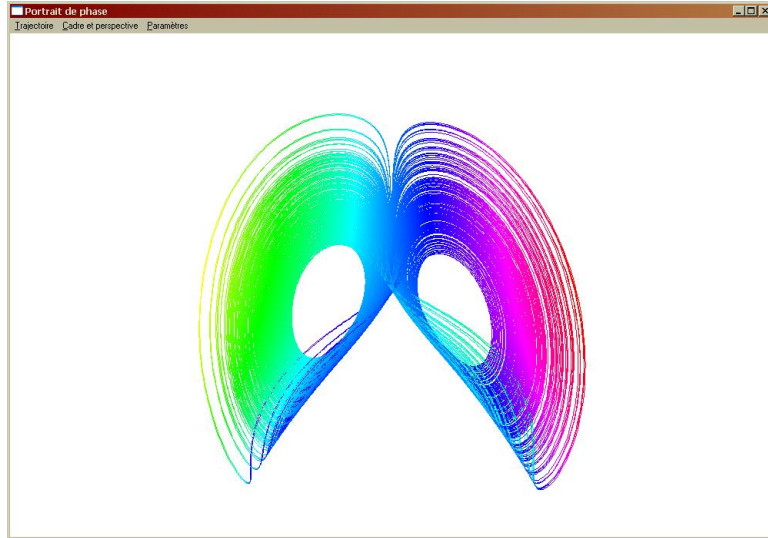


Figure 6: La trajectoire de l'équation de Lorenz issue du point $(-1, -1, 5)$ mais seulement pour $t \in [1000, 3000]$.

Cet ensemble est un "attracteur". Sa structure topologique est très compliquée : il est fermé, certes, mais ce n'est pas une courbe régulière immergée dans l'espace. C'est un *attracteur étrange*.

2.5 Pièges

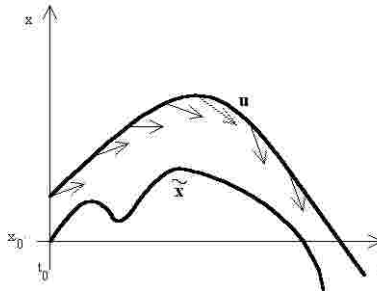


Figure 7: Piège à trajectoire.

Cette notion est très visuelle, et particulièrement efficace pour les systèmes de dimension 2.

Théorème 6 Soit un problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

où f est une fonction de deux variables réelles. On se propose d'étudier la solution $\tilde{x}$ de ce problème pour $t > t_0$. Soit u une fonction définie sur $[t_0, t_1[$, avec $u(t_0) > x_0$, et telle que $f(t, u(t)) < \dot{u}(t)$ pour tout t dans $[t_0, t_1[$.

Alors, pour tout t appartenant à $[t_0, t_1[$ et au domaine de définition I de $\tilde{x}$, on a $\tilde{x}(t) < u(t)$.

Dans cette situation, on dit que u est une barrière supérieure pour l'équation. On dit aussi que le domaine $\{(t, x), t \in [t_0, t_1[, x < u(t)\}$ est un piège.

L'interprétation géométrique de l'inégalité $f(t, u(t)) < \dot{u}(t)$ est la suivante (voir aussi la figure) : le vecteur $(1, f(t, u(t)))$ est le vecteur tangent à la solution de l'équation différentielle passant par le point $(t, u(t))$. Le vecteur $(1, \dot{u}(t))$ est le vecteur tangent au graphe de la fonction u . Ainsi l'inégalité indique que les solutions de l'équation différentielle pointent vers la zone située **sous** le graphe de u . Les solutions de l'équation différentielle traversent le graphe de la fonction u toujours du haut vers le bas.

On définit de même les barrières inférieures. Et aussi les pièges pour $t < 0$.

Preuve On fait une démonstration par l'absurde : on suppose que l'ensemble

$$J = \{t \in I \cap [t_0, t_1[\text{ tels que } \tilde{x}(t) \geq u(t)\}$$

est non vide. Il a alors une borne inférieure qu'on notera T . Par hypothèse $(u(t_0) > x_0)$, cette borne inférieure n'est pas t_0 .

On a $\tilde{x}(T) \geq u(T)$, et par continuité des fonctions u et $\tilde{x}$, on a $\tilde{x}(T) = u(T)$. On a donc aussi

$$\dot{\tilde{x}}(T) = f(T, \tilde{x}(T)) < \dot{u}(T)$$

Donc $(\tilde{x} - u)$ est nulle en T , avec une dérivée strictement négative. Dans un voisinage de T , à gauche de T , cette fonction est donc strictement positive, ce qui contredit le fait que T soit le minimum de J . ■

En dimension plus grande, les pièges doivent être des hypersurfaces, ce qui rend souvent les choses plus compliquées. Mais un cas particulier important est le

Lemme 7 (de Gronwall) Soit $\tilde{x}$ une fonction dérivable de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\tilde{x}(0)$ est nul et que

$$\forall t \in [0, T] \quad \|\dot{\tilde{x}}(t)\| \leq 1 + k\|\tilde{x}(t)\|$$

On a alors

$$\forall t \in [0, T] \quad \|\tilde{x}(t)\| \leq \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)$$

Ce lemme est un théorème de piège en dimension d : Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|f(t, x)\| \leq 1 + k\|x\|$. Soit $\tilde{x}$ la solution du problème de Cauchy $\dot{x} = f(t, x)$, $x(0) = 0$. La surface d'équation $\|x\| = \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)$ (voir figure 8) est un piège pour cette trajectoire, car, le long de la surface, le vecteur $(1, f(t, x))$, tangent aux solutions de l'équation différentielle, pointe vers l'intérieur : pour vérifier cela, il faut calculer le produit scalaire de $(1, f(t, x))$ par le vecteur ν , normal à la surface :

$$\nu = \nabla \left(\|x\| - \frac{1}{k} (e^{kt} - 1) \right)$$

$$\nu = \left(-e^{kt} \quad , \quad \frac{x}{\|x\|} \right)$$

$$\langle \nu, (1, f(t, x)) \rangle = -e^{kt} + \frac{\langle x, f(x, t) \rangle}{\|x\|}$$

Cette quantité est toujours négative (quand (t, x) appartient à la surface) car

$$\langle x, f(x, t) \rangle \leq \|x\| \|f(x, t)\| \leq \|x\| (1 + k\|x\|) = \|x\| e^{kt}$$

Le vecteur ν pointe vers l'extérieur du piège, donc l'inégalité sur le gradient montre que les solutions de l'équation différentielle pointent vers l'intérieur de la trompette.

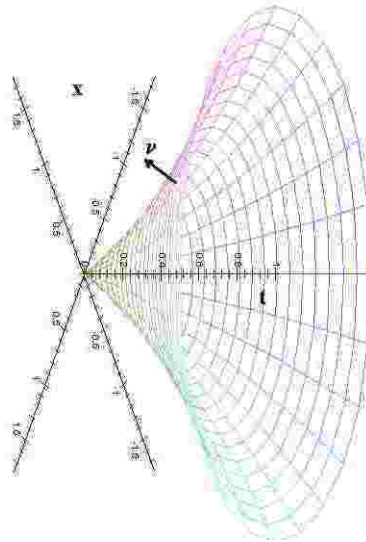


Figure 8: Le piège du lemme de Gronwall

fig:Gronwall

3 Systèmes positifs

3.1 Définitions

Quand on modélise un système de la nature, les variables représentent souvent la mesure d'une quantité essentiellement positive (effectif de population, concentration chimique, ...). Ceci est presque toujours le cas dans les modélisations biologiques. Une exception notable à cette assertion est le cas de la mécanique où les variables de base mesurent la position d'un objet sur un axe. Dans ce paragraphe, on se placera dans la situation où toutes les variables sont essentiellement positives. Une conséquence attendue à cette affirmation est que les trajectoires du modèle ne doivent jamais enfreindre cette contrainte de positivité. Un système différentiel qui modélise un tel phénomène naturel est donc contraint à vérifier certaines propriétés. C'est ce qu'on veut étudier dans ce paragraphe.

Il est bien commode d'adopter les notations suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x > 0 \iff (\forall i \ x_i > 0)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \geq 0 \iff (\forall i \ x_i \geq 0)$$

On appellera "orthant positif" l'ensemble $(\mathbb{R}^+)^n$ des points positifs (au sens large)

Définition 7 Un système $\dot{x} = f(x)$ est dit positif si et seulement si l'orthant positif est positivement invariant

On peut aussi traduire formellement cette définition (on rappelle que $x(t)$ est la trajectoire issue du point $x(0) = x_0$) :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x_0(t) \geq 0 \text{ et } t \geq 0 \implies x(t) \geq 0$$

Il est intéressant de regarder une autre définition un petit peu plus restrictive :

Définition 8 Un système $\dot{x} = f(x)$ est dit fortement positif si et seulement si

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad x_0(t) \geq 0 \text{ et } t > 0 \implies x(t) > 0$$

Avec cette nouvelle définition, même si la condition initiale appartient au bord de l'orthant positif, la trajectoire pénètre immédiatement à l'intérieur de l'orthant positif.

Les systèmes positifs peuvent se caractériser très facilement à l'aide de la proposition suivante, qui est un corollaire immédiat de la théorie des pièges vue ci-dessus :

Proposition 8 Un système $\dot{x} = f(x)$ est positif si et seulement si

$$\forall i \quad x_i = 0 \implies f_i(x) \geq 0$$

3.2 Exemples

3.2.1 Modèles à compartiments

(cf <http://www.inma.ucl.ac.be/INMA2370/cours/chap4.pdf>) Un système à compartiments est constitué par un réseau de compartiments interconnectés et numérotés de 1 à n . Pour fixer les idées, un exemple de système à 3 compartiments est représenté à la figure 9. Les flèches indiquent les flux de contenu que les divers compartiments peuvent échanger entre eux et avec l'extérieur du système. D'une manière générale, un système à compartiments sera donc représenté par un graphe orienté dont les noeuds correspondent aux compartiments et les arcs aux flux.

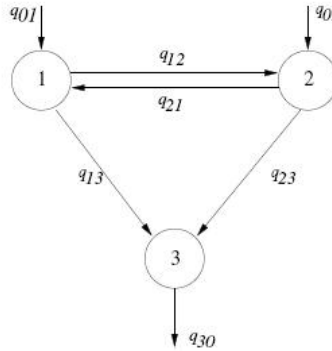


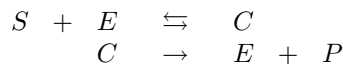
Figure 9: Un modèle à 3 compartiments

`fig:compartiments`

Pour déduire de ce schéma un système différentiel, il faut encore exprimer les flux en fonction des contenus. Et, bien sûr, chaque flèche représente un flux positif, qui ne peut pas (resp. peut) s'annuler quand le contenu d'origine est vide. Ces contraintes indiquent précisément que le système est positif (resp. strictement positif).

3.2.2 Système chimique

Un cas particulier des modèles à compartiments est classique en dynamique chimique : on veut étudier les réactions chimiques dans un milieu considéré comme homogène. On écrit pour cela toutes les réactions chimiques considérées. Donnons un exemple simple d'une telle écriture : la transformation du substrat S en un produit P , catalysée par l'enzyme E . La lettre C représente le complexe, molécule où le substrat et l'enzyme sont liés.



La flèche double indique que la première réaction est réversible. En fait, j'aurais mieux fait d'écrire trois réactions chimiques...

Les lois de la dynamique chimique donnent les vitesses de réaction sous une forme très précise (la loi dite d'action de masse) : la vitesse d'une réaction est proportionnelle aux concentrations des produits réactants. Le système différentiel s'écrit alors $\dot{x} = N.v(x)$ où N est la matrice de stoechiométrie et $v(x)$ le vecteur des vitesses de réaction. Chaque colonne de la matrice N correspond à une réaction, chaque ligne à une espèce chimique. Le coefficient situé à l'intersection d'une ligne et d'une colonne vaut $+1$ si l'espèce est produite par la réaction, ou -1 si elle est consommée. Dans certains cas, ces coefficients peuvent avoir des valeurs entières différentes (par exemple pour $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$...) L'exemple étudié éclairera bien mieux qu'un discours :

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v(x) = \begin{pmatrix} k_1 x_S x_E \\ k_2 x_C \\ k_3 x_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_S &= -k_1 x_S x_E + k_2 x_C \\ \dot{x}_E &= -k_1 x_S x_E + k_2 x_C + k_3 x_C \\ \dot{x}_C &= k_1 x_S x_E - k_2 x_C - k_3 x_C \\ \dot{x}_P &= k_3 x_C \end{cases}$$

Ce système, ainsi que tout autre système chimique construit selon le même principe, est évidemment positif. Et c'est heureux, car la contrainte de positivité DOIT être satisfaite par un modèle d'un phénomène naturel qui satisfait forcément la contrainte de positivité.

3.3 Systèmes affines positifs

Soit A une matrice et B un vecteur. On veut étudier les systèmes positifs affines $\dot{x} = Ax + B$.

Définition 9 Une matrice est dite positive (resp. strictement positive) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

Une matrice est dite de Metzler (resp. Metzler stricte) si et seulement si ses termes non-diagonaux sont positifs (resp. strictement positifs).

Lemme 9 M est une matrice de Metzler si et seulement si il existe un réel k tel que $M + k\mathbf{1}$ soit positive.

Proposition 10 Le système $\dot{x} = Ax + B$ est positif si et seulement si $B \geq 0$ et A est une matrice de Metzler.

La preuve est immédiate.

Dans toute la suite, je donnerais certains résultats pour le cas "strictement positif", d'autres pour le cas "positif", mais je devrais, en toute rigueur faire les deux, sachant que cela n'est pas toujours aussi facile que cela. Le temps ne me permet pas de m'attarder à ces délicates nuances.

Théorème 11 (Perron) Une matrice strictement positive possède une valeur propre réelle simple, positive, strictement plus grande que le module de n'importe quelle autre valeur propre, et un vecteur propre strictement positif associé.

Théorème 12 (Perron-Frobenius) Une matrice positive irréductible possède une valeur propre réelle simple, positive, supérieur ou égale au module de n'importe quelle autre valeur propre, et un vecteur propre strictement positif associé.

Preuve du théorème de Perron : On remarque tout d'abord que si x est non nul, alors $Ax > 0$. On en déduit que tout vecteur propre v vérifiant $v \geq 0$ vérifie aussi $v > 0$.

Soit K le compact défini par $x \geq 0$ et $\sum x_i = 1$. On définit sur K l'application θ par

$$\theta(x) = \max\{t \mid tx \leq Ax\} = \min_i \sum_j a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

On montre (avec l'hypothèse $A > 0$) que la fonction θ est continue sur K . De plus, elle est minorée et majorée : $n \min_{ij} a_{ij} \leq \theta(x) \leq n \max_{ij} a_{ij}$.

On montre ensuite que si x n'est pas un vecteur propre de A , alors $\theta(\frac{Ax}{\|Ax\|}) > \theta(x)$: en effet, posons $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. On sait que $\theta(x)x \leq Ax$, et il n'y a pas égalité, donc $A(\theta(x)x) < A(Ax)$, qui se traduit facilement par $\theta(y) > \theta(x)$.

La fonction θ atteint son maximum r en un point x^* . Ce point est nécessairement un vecteur propre, associé à la valeur propre r .

La valeur propre r , réelle, positive, est supérieure ou égale au module de n'importe quelle valeur propre : en effet, soit v un vecteur propre (complexe) associé à une valeur propre (complexe) λ . On a alors $\lambda v = Av$ d'où $|\lambda||v| \leq A|v|$ où $|v|$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^{+n}$ de coordonnées $|v_i|$. On en déduit $|\lambda| \leq \theta(|v|) \leq r$.

L'espace propre associé à r est engendré par x^* : en effet, si ce n'était pas vrai : soit v un autre vecteur propre associé à la valeur propre r . Le vecteur $x^* + tv$ est encore un vecteur propre de A , positif si t est assez petit, mais pas strictement positif pour un certain t . Ceci contredit le premier point de la preuve.

La valeur propre r est simple : si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur v tel que $Av = rv + x^*$. On pose alors $x = x^* + \varepsilon v$ avec ε positif suffisamment petit pour avoir $x \geq 0$. On a alors $Ax = rx + \varepsilon x^*$ et on en déduit la contradiction $\theta(\frac{x}{\|x\|}) > r$. ■

Lemme 13 [lem:inverseMetzler](#) Si A est une matrice de Metzler dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative, alors $-A^{-1}$ est une matrice positive.

Preuve Soit k un réel positif tel que $P = A + k\mathbf{1}$ soit une matrice positive. Notons r la plus grande valeur propre réelle de P . Comme $r - k$ est une valeur propre de A , on sait que $r < k$. De plus on sait que toute valeur propre de P a un module inférieur ou égal à r . Donc la norme de P est inférieure strictement à k , et le calcul suivant est valide :

$$(-A)^{-1} = \frac{1}{k} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{k}P \right)^{-1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^i} P^i$$

et le lemme s'en déduit immédiatement. ■

Théorème 14 [th:eq-Metzler](#) Soit $\dot{x} = Ax + B$ un système positif (A irréductible et $B \neq 0$ pour la deuxième assertion).

- Si A est une matrice stable, alors le système a un équilibre positif x^* .
- Si le système admet un équilibre positif x^* , alors A est une matrice stable.

Preuve • C'est une conséquence immédiate du lemme 13: $x^* = (-A)^{-1}B$.

- On applique le théorème de Frobenius à la matrice $A + k\mathbf{1}$. On note $r + k$ la plus grande valeur propre, réelle positive, et ${}^t v$ un vecteur propre gauche de la matrice: ${}^t v A = r {}^t v$. Ce dernier est strictement positif. La relation $Ax^* + B = 0$ donne alors $r {}^t v \cdot x^* + {}^t v \cdot B = 0$. Les propriétés de signe de v , x^* et B donnent alors $r < 0$, d'où le résultat. ■

3.4 Systèmes coopératifs

La notion de système positif ne tient compte que de ce qui se passe lorsque l'état est situé sur l'un des hyperplans de coordonnées. La structure est donc très molle à l'intérieur de l'orthant positif, ce qui ne permet pas beaucoup d'avancées. La notion de système coopératif est par contre beaucoup plus rigide, bien qu'elle reste de type "positivité".

Définition 10 Un système $\dot{x} = f(x)$ est dit coopératif si

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+n} \quad \forall i \neq j \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) > 0$$

Pour paraphraser cette définition, on utilisera le langage de la dynamique de populations : un système est coopératif si, en toute circonstance, l'augmentation de la population j favorise l'augmentation de la population i .

Soit A une matrice de Metzler (par commodité, on la supposera inversible et irréductible) et B un vecteur positif. Le système ci-dessous est appelé système de Lotka Volterra de type coopératif

$$\text{eq : LVcoop} \dot{x} = \text{diag}(x) \cdot (A \cdot x + B) \quad \text{c-à-d} \quad \dot{x}_i = x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \right) \quad (1)$$

C'est un système positif, coopératif. (Remarquez qu'il n'est pas strictement positif, loin de là!) d'où l'intérêt des subtiles nuances que j'ai escamotées dans ce cours.

Théorème 15 Le système coopératif de Lotka-Volterra (1) possède un point d'équilibre à l'intérieur de l'orthant positif si et seulement si A est stable. De plus, ce point d'équilibre est stable.

Preuve Le système admet un équilibre strictement positif si et seulement si l'équation $Ax + B = 0$ admet une solution strictement positive. Le théorème 14 montre que c'est équivalent à la stabilité de M .

Notons x^* ce point d'équilibre et évaluons la jacobienne en ce point. Elle vaut DA , où D est la matrice diagonale construite avec les composantes de x^* . Le lemme qui suit termine la preuve du théorème. ■

Lemme 16 Si A est une matrice de Metzler stable et D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, alors DA est encore une matrice de Metzler stable.

Preuve Notons m la borne inférieure des coefficients diagonaux de D . Elle est strictement positive. On considère la famille de matrices

$$A(t) = (tD + (1-t)m\mathbb{1}) \cdot A$$

C'est une famille continue de matrices, avec $A(0) = mA$, et $A(1) = DA$. On va montrer que $A(t)$ est une matrice de Metzler stable pour tout t dans $[0, 1]$. On définit

$$E = \{ t \geq 0 \mid A(t) \text{ est Metzler stable} \}$$

et on va montrer que E contient $[0, 1]$ tout entier.

Remarquons pour commencer que pour tout $t \geq 0$, les coefficients diagonaux de $D(t) = tD + (1-t)m\mathbb{1}$ sont tous strictement positifs. On en déduit que $A(t)$ est une matrice de Metzler.

Supposons (par l'absurde) que l'ensemble E ci-dessus ne contienne pas $[0, 1]$. Soit τ la borne inférieure de son complémentaire. On sait alors que $M(\tau)$ est une matrice de Metzler sur le "bord" des matrices stables : elle admet au moins une valeur propre de partie réelle nulle, et toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative ou nulle. D'autre part, comme c'est une matrice de Metzler, il existe $k > 0$ tel que $M(\tau) + k\mathbb{1}$ soit une matrice positive. D'après le théorème de Perron-Frobenius, cette matrice positive possède une valeur propre réelle positive λ dont la partie réelle majore strictement les parties réelles des autres valeurs propres. On en déduit que $M(\tau)$ admet 0 comme valeur propre, et aucune autre valeur propre. Mais le déterminant de $M(\tau)$ est le produit du déterminant de A (non nul) par celui de $D(\tau)$, non nul. Il est non nul, ce qui est absurde. ■

4 Exercices

1. L'équation logistique

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right)$$

modélise la croissance d'une population. Le taux de croissance $r(1 - \frac{x}{K})$ décroît avec la densité et s'annule quand x prend la valeur particulière K appelée *capacité limite* ou *carrying capacity*.

Résoudre explicitement l'équation logistique.

Décrire par des mots l'évolution de la population.

2. Résoudre explicitement l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Que devient la solution calculée quand t approche de la valeur 1 ? l'atteint ? Que pensez vous qu'il arrive au système réel décrit par ce modèle ? On définit le modèle discret par

$$\begin{cases} x(t + \delta t) &= x(t) + x(t)^2 \delta t \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

avec $\delta t = 0.001$. Que devient la solution quand t approche, atteint ou dépasse 1 ? Comparez avec le résultat précédent.

3. On veut étudier les migrations pour une population dispersée sur de nombreuses îles, disposées en réseau carré. Chaque année, les habitants d'une île donnée décident d'envoyer en migration dans les quatre îles voisines un pourcentage de leur population.

Ecrire la récurrence qui détermine l'évolution de ces populations.

Pourriez vous "résoudre" cette récurrence dans le cas particulier où les taux de migration sont constants.

Serait-il intéressant, judicieux, impossible, ... de considérer que les pourcentages dépendent des populations des îles. Faites des choix raisonnables, et proposez des modèles .

4. Résoudre explicitement le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Ecrire l'équation récurrente (algorithme d'Euler) correspondant de pas δt .

Résoudre cette récurrence.

Quel est le comportement quand t tend vers l'infini de la solution de cette récurrence ? Que vaut $x^2\left(\frac{1}{\delta t}\right) + y^2\left(\frac{1}{\delta t}\right)$?

Faire le changement de variables pour écrire le système en coordonnées polaires.

Ecrire l'équation récurrente (algorithme d'Euler) correspondant à ce nouveau système.

Quel est le comportement quand t tend vers l'infini de la solution de cette récurrence ?

5. Pour étudier une parcelle de terrain spongieux, on dispose de puits alignés équidistants. La hauteur d'eau dans chaque puits est notée x_s où s est la position du puits (en mètres). On note δs la distance entre deux puits. Le modèle, très simplifié, donne

$$x_s(t + \delta t) = x_s(t) + c(x_{s+\delta s}(t) - x_s(t)) + c(x_{s-\delta s}(t) - x_s(t))$$

Résoudre la récurrence avec pour condition initiale $x_s(0) = (-1)^{s/\delta s} \varepsilon$.

Traduire le modèle par une équation aux dérivées partielles.

Déduire de ce qui précède que, lorsqu'on veut écrire un algorithme de calcul des solutions d'une équation aux dérivées partielles, il faut faire attention aux choix des pas de discrétisation.

6. Montrer qu'un point stationnaire stable est isolé (c'est-à-dire qu'il est localement unique). Donner un exemple de système avec des points stationnaires non isolés.

7. Soit A une matrice carrée de dimension n .

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\dot{x} = Ax$ est un espace vectoriel. Montrer que la dimension de cet espace est n (utiliser pour cela le théorème d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy).

Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ . Montrer que $e^{\lambda t}v$ est une solution de l'équation $\dot{x} = Ax$.

Montrer que si λ est valeur propre double et si $Au = \lambda u + v$ et $Av = \lambda v$, alors $e^{\lambda t}(u + tv)$ est aussi solution.

En déduire que toutes les composantes d'une solution de $\dot{x} = Ax$ s'écrivent comme une somme de termes du type $t^p e^{\lambda t}$. En déduire la condition sur les valeurs propres de A qui assure la stabilité de l'équilibre.

8. Calculer, selon les valeurs du paramètre a , tous les équilibres du système

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \dot{y} &= a - x \end{cases}$$

Etudier la stabilité de ces équilibres.

Dessiner les trajectoires de cette équation à l'aide d'un logiciel... (choisir $a = 2$, $a = 1.2$, $a = 1$, $a = 0$).

Observer la bifurcation de Hopf.

9. Cet exercice, ainsi que le suivant, est un peu délicat, mais, si on fait un dessin, les choses se voient.

Soit $a > 0$.

- 1) Soit $\gamma > 0$. Trouver la solution maximale $\psi_\gamma : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\psi'(t) = \gamma^2 + \psi^2(t)$ qui vérifie $\psi_\gamma(a) = 0$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(t, x) = t + x^2$.
 - (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ qui vérifie $\varphi(a) = 0$.
 - (b) On suppose $\gamma^2 < a$. Montrer que, si $t \in]a, \beta[\cap I_\gamma$, on a $\varphi(t) > \psi_\gamma(t)$. En déduire que $\beta - a \leq \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ et que $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = +\infty$.
 - (c) On suppose $\gamma^2 > a$. Montrer que, si $t \in]\alpha, \beta[\cap]a, \gamma^2[\cap I_\gamma$, on a $\varphi(t) < \psi_\gamma(t)$. En déduire que $]\alpha, \beta[$ contient $]a, \gamma^2[\cap I_\gamma$.

(d) Démontrer que $\frac{\pi}{2\gamma_0} \leq \beta - a$, où γ_0 est la racine positive de l'équation

$$\gamma^3 - a\gamma - \frac{\pi}{2} = 0.$$

10. On étudie l'équation $y' = \sin(xy)$.

- Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Montrer que si $y(x)$ est solution, alors $y(-x)$, $-y(x)$ et $-y(-x)$ sont aussi des solutions. En déduire que le portrait de phase de l'équation a des symétries, et qu'il suffit d'étudier sur $[0, +\infty[$ les solutions de condition initiale $y(0) > 0$.
- Tracer les courbes du plan (x, y) vérifiant $\sin(xy) = 0$. Tracer les courbes du plan (x, y) vérifiant $\sin(xy) = -1$.
- Surligner en rouge les portions des courbes précédentes qui sont des barrières inférieures, et en bleu celles qui sont des barrières supérieures.
- En déduire la limite de la solution de condition initiale (x_0, y_0) quand $x_0 > y_0$.
- A l'aide de segments horizontaux et de segments de pente 1, construire une barrière supérieure dans le domaine $0 < x < y$.
- (calculs pénibles) Donner une formule de récurrence pour calculer les coins de cette barrière. En déduire que cette barrière rencontre la première diagonale.
- Dessiner le portrait de phase.

11. Tous les paramètres donnés ci-dessous sont supposés positifs ou nuls. On veut étudier le système

$$\forall i \quad \dot{x}_i = (b_i - c_i X)x_i \quad \text{avec} \quad X = \sum_{j=1}^n x_j$$

- Le système est-il positif ?
- Déterminer une partie naturelle de l'espace d'état positivement invariante.
- Quels sont les équilibres du système ?
- Déterminer les équilibres asymptotiquement stables.

5 Annexe : preuve standard du théorème d'existence et d'unicité

Dans toute la suite, on étudiera l'existence et l'unicité de la solution de ce problème en restriction au demi-axe $[t_0, +\infty[$. On doit bien sûr compléter cette étude, de façon identique pour avoir l'autre côté, et étudier l'existence et l'unicité sur un voisinage de t_0 .

Soit h un réel fixé pour l'instant, à penser petit. On définit la suite de points (t_n, ξ_n) par récurrence à partir du point $(t_0, \xi_0) = (t_0, x_0)$.

$$\begin{cases} t_{n+1} &= t_n + h \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + hf(t_n, \xi_n) \end{cases}$$

On appellera *pointillé* cette suite de points dessinés dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Remarquez que la pente $\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{t_{n+1} - t_n}$ est égale à la pente de la tangente en (t_n, ξ_n) de la solution de l'équation passant par le point (t_n, ξ_n) .

On définit ensuite une fonction sur un voisinage de t_0 (à droite de t_0) en traçant des segments pour rejoindre les points du pointillé : on a une fonction affine par morceaux. Le principe de l'algorithme d'Euler tient au fait que, quand h tend vers zéro, la fonction affine par morceaux décrite ci-dessus converge uniformément vers la solution de l'équation différentielle sur un certain voisinage de t_0 .

Cependant, la démonstration de ce résultat ne se fait qu'assez difficilement.

Exemple Pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

la récurrence définissant le pointillé se "résout" :

$$t_n = nh \qquad \xi_n = (1 + h)^n$$

Soit τ un réel positif fixé. On définit maintenant une suite $h_n = \tau/n$; elle tend vers zéro. Et on regarde la limite de (t_n, ξ_n) quand n tend vers l'infini : c'est $(\tau, \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \tau/n)^n)$. On voit donc que, pour une suite de h tendant vers zéro, au point τ , la suite des pointillés converge vers (τ, e^τ) .

Pour démontrer que la suite des pointillés converge (uniformément sur un intervalle compact) vers la fonction exponentielle, il reste à écrire les choses proprement...

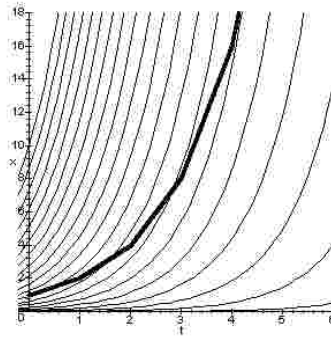


Figure 10: Solutions de $\dot{x} = x$, et pointillé associé (avec $h = 1$).

Solutions ε -approchées : définition - exemple

La méthode d'Euler (voir ci-dessus) pour approcher la solution d'un problème de Cauchy est très bien adaptée pour une évaluation numérique : en effet, pour calculer la valeur d'un pointillé en une abscisse t , il suffit d'évaluer f en t/h points.

Les solutions ε -approchées définies ci-dessous ressemblent apparemment aux pointillés, mais attention, pour vérifier que ξ est une solution ε -approchée, il faut calculer f en tous les points du graphe de ξ . Ainsi, cette notion n'est pas du tout adaptée au calcul numérique ! Mais elle permettra une démonstration du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'un problème de Cauchy.

Définition 11 Une fonction ξ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continue, de classe C^1 par morceaux, est dite solution ε -approchée de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ si on a

$$\forall t \in I \quad \|\dot{\xi}(t) - f(t, \xi(t))\| \leq \varepsilon$$

Remarque Si l'inégalité est vérifiée en tout point où ξ est dérivable, alors, par continuité de la dérivée à gauche, l'inégalité est aussi vérifiée pour la dérivée à gauche aux points où ξ n'est pas dérivable. De même, elle est vérifiée pour la dérivée à droite.

Si, dans cette définition, on accepte les fonctions ξ de classe C^1 seulement par morceaux, c'est que, dans la suite, on construira des solutions ε -approchées affines par morceaux.

Exemple Soit l'équation $\dot{x} = x$. Soit N un entier positif donné. Définissons la fonction ξ affine par morceaux, dont le graphe relie les points (voir figure ci-dessus)

$$(t_n, \xi_n) = \left(\frac{n}{N}, \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n \right) \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

Cette fonction est définie sur l'intervalle $[0, 1]$, elle y est C^1 par morceaux. Soit t un point quelconque de $[0, 1]$. Notons n la partie entière de Nt , de sorte que $t_n \leq t < t_{n+1}$. La définition de ξ (affine par morceaux) donne

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{t_{n+1} - t_n} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n$$

Pour savoir si ξ est une solution ε -approchée de $\dot{x} = x$, il faut mesurer l'erreur $|\dot{\xi}(t) - \xi(t)|$. Le calcul précédent montre qu'elle vaut $|\xi(t_n) - \xi(t)|$. Le fait que ξ soit affine sur l'intervalle $[t_n, t]$ permet d'évaluer simplement cette erreur qui vaut $\left|(1 + \frac{1}{N})^n (t - t_n)\right|$ qu'on peut majorer par $(1 + \frac{1}{N})^n \frac{1}{N}$ puis par $(1 + \frac{1}{N})^N \frac{1}{N}$ et enfin par $\frac{e}{N}$. Ainsi, si N est supérieur à $\frac{e}{\varepsilon}$, la fonction ξ est une solution ε -approchée.

Construction d'une solution ε -approchée, cas simple

Supposons, dans ce paragraphe que la fonction f soit définie sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, qu'elle soit bornée par un réel M , et qu'elle soit globalement (K_1, K_2) -lipschitzienne c'est-à-dire

$$\forall t, s, x, y \quad \|f(t, x) - f(s, y)\| \leq K_1|t - s| + K_2\|x - y\|$$

Ces hypothèses globales sont très restrictives, et on verra dans le paragraphe suivant comment s'en débarrasser.

On définit, par récurrence, une suite t_n et la restriction de ξ à $[t_n, t_{n+1}]$ ainsi : tout d'abord t_0 et $\xi(t_0) = x_0$ sont connus. Supposons maintenant t_n et $\xi(t_n)$ déjà déterminés. Notons alors I_n l'ensemble

$$I_n = \{t \in [t_n, T] \text{ tels que } \|f(t_n, \xi(t_n)) - f(t, \xi(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \xi(t_n)))\| \geq \varepsilon\}$$

On définit alors :

$$t_{n+1} = \begin{cases} \min I_n & \text{si le min existe} \\ T & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\xi(t) = \xi(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \xi(t_n)) \quad \text{pour } t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Vérification de la cohérence de la construction

Pour que la construction ci-dessus soit valide et donne bien une solution ε -approchée définie sur $[t_0, T]$, il faut vérifier les différents points suivants :

- La valeur t_{n+1} est correctement définie, car, dans la définition, on a dit quoi faire quand l'ensemble I_n est vide. De plus, on sait que, dès que cet ensemble est non vide, il est minoré par t_n , il a donc une borne inférieure.
- La suite t_n est croissante, c'est une conséquence immédiate de sa définition.
- Tant qu'elle n'a pas atteint la valeur T , elle est strictement croissante, même mieux : elle vérifie

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{\varepsilon}{K_1 + K_2 M}$$

En effet, pour $t - t_n < \frac{\varepsilon}{K_1 + K_2 M}$, on a

$$\begin{aligned} \|\dot{\xi}(t) - f(t, \xi(t))\| &= \|f(t_n, \xi(t_n)) - f(t, \xi(t))\| \leq \\ &\leq K_1 |t - t_n| + K_2 \|\xi(t) - \xi(t_n)\| \leq (K_1 + K_2 M) |t - t_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

- Ainsi, la suite des t_n croît jusqu'à un certain indice N , au-delà duquel elle est constante, égale à T .
- La fonction ξ est donc définie sur $[t_0, T]$. De surcroît, elle vérifie trivialement la majoration nécessaire pour être une solution ε -approchée.

Construction d'une solution ε -approchée, cas général

On veut montrer que la construction précédente reste valide, *localement*, dans le cas où la fonction f est seulement continue au point (t_0, x_0) .

Lemme 17 *lemmerM* On suppose que f est continue au point (t_0, x_0) . Alors, il existe des nombres réels positifs r et M tels que f soit bornée par M pour (t, x) dans l'ensemble $[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \times \bar{B}(x_0, r)$, où $\bar{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de centre x_0 et de rayon r . Dans certains ouvrages, l'ensemble $[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \times \bar{B}(x_0, r)$ s'appelle un tonnelet de sécurité.

Preuve On choisit d'abord M supérieur à $\|f(t_0, x_0) + 1\|$. Par continuité de f en (t_0, x_0) , l'ensemble des (t, x) tels que $\|f(t, x)\| \leq M$ est un voisinage de (t_0, x_0) . On peut alors choisir r pour que ce voisinage contienne le pavé $P = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \times \bar{B}(x_0, r)$.

Remarque qu'on a donné un procédé de construction d'un tonnelet de sécurité. Il existe d'autres tonnelets de sécurité. ■

Proposition 18 *propexist* On suppose f continue au point (t_0, x_0) . Soit $I \times \bar{B}(x_0, r)$ un tonnelet de sécurité. Alors, pour tout ε positif, il existe une solution ε -approchée de $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, définie sur I tout entier.

Remarque Le domaine de définition de la solution ε -approchée ne dépend pas de ε . Ceci est fondamental pour la suite !

Preuve On pratique la même construction, avec les mêmes notations, que dans le cas simple (avec $T = t_0 + r/M$), mais les vérifications sont plus compliquées : il faut par exemple s'assurer qu'on ne sort jamais du tonnelet de sécurité P .

- Supposons (hypothèse de récurrence) que les points (t_i, ξ_i) soient définis, dans le tonnelet P , pour tout $i \leq n$. Alors, pour tout i , on a $\|f(t_i, \xi(t_i))\| \leq M$. La dérivée de la fonction ξ est majorée par M sur tout l'intervalle $[t_0, t_n]$. En conséquence, on a $\|\xi(t_n) - x_0\| \leq (t_n - t_0)M$.

On veut montrer que I_n est correctement défini. Soit t un point quelconque de $[t_n, T]$. On doit s'assurer que le point $(t, \xi(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \xi(t_n)))$ appartient bien au tonnelet P pour que f soit bien définie en ce point. Pour cela, on majore :

$$\begin{aligned} \|\xi(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \xi(t_n)) - x_0\| &\leq \|\xi(t_n) - x_0\| + (t - t_n)\|f(t_n, \xi(t_n))\| \leq \\ &\leq (t_n - t_0)M + (t - t_n)M \leq (t - t_0)M \leq r \end{aligned}$$

Ainsi, $(t, \xi(t_n) + (t - t_n)f(t_n, \xi(t_n)))$ appartient bien au tonnelet de sécurité, et le critère pour déterminer si un point t appartient à I_n est bien défini. L'ensemble I_n est bien défini.

- L'instant t_{n+1} est donc aussi bien défini, et la suite (t_n) est croissante. Donc elle converge. Notons t_∞ sa limite. Elle appartient à l'intervalle $[t_0, T]$. On va cependant démontrer mieux :
- La suite t_n stationne en T , c'est-à-dire, il existe N tel que pour tout n supérieur à N , on ait $t_n = T$. Pour démontrer cela, raisonnons par l'absurde en supposant que, pour tout n , on ait $t_n < T$.

Comme $\|\xi(t_{n+1}) - \xi(t_n)\| = (t_{n+1} - t_n)\|f(t_n, \xi(t_n))\| \leq M(t_{n+1} - t_n)$, la fonction ξ est lipschitzienne, donc continue, donc $\xi(t_n)$ converge. Notons ξ_∞ sa limite. Par continuité de ξ et de f sur le tonnelet fermé, la suite $\|f(t_{n+1}, \xi(t_{n+1})) - f(t_n, \xi(t_n))\|$ tend vers zéro. Or, par définition de t_{n+1} , (qui est différent de T), on a $\|f(t_{n+1}, \xi(t_{n+1})) - f(t_n, \xi(t_n))\| = \varepsilon$. Il y a donc une contradiction.

- La fonction ξ est donc définie sur tout l'intervalle $[t_0, T]$. De plus, il est facile de voir que c'est une solution ε -approchée. ■

Un lemme de Gronwall

Le lemme ci-dessous est un cas particulier d'un lemme très fondamental dont on reparlera plus loin.

Lemme 19 *lemmegronwall* Soit u une fonction dérivable de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $u(0)$ est nul et que

$$\forall t \in [0, T] \quad \|u'(t)\| \leq 1 + k\|u(t)\|$$

On a alors

$$\forall t \in [0, T] \quad \|u(t)\| \leq \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)$$

Preuve (première) Posons $r = \|u\|$. On suppose que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. On a alors $|rr'| = |\langle u, u' \rangle| \leq \|u\| \|u'\|$ d'où $r' < \|u'\|$. La fonction r vérifie donc

$$\begin{cases} r' & \leq 1 + kr \\ r(0) & = 0 \end{cases}$$

Posons maintenant $r = we^{kt}$. On a donc $r' = w'e^{kt} + kwe^{kt}$. Et les hypothèses sur la fonction r se traduisent ainsi sur w :

$$\begin{cases} w' & \leq e^{-kt} \\ w(0) & = 0 \end{cases}$$

Par intégration, on obtient :

$$w(t) = \int_0^t w'(\tau) d\tau \leq \int_0^t e^{-k\tau} d\tau = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt})$$

qui permet de remonter facilement au résultat du lemme. ■

Cette preuve a deux défauts : le premier c'est qu'on a dû supposer que la norme de l'énoncé est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Le deuxième est que la fonction r n'est pas forcément dérivable aux points où elle s'annule. On va remédier à ces deux défauts dans une deuxième démonstration, mais cela a un petit prix : des calculs un peu plus lourds.

Preuve (deuxième) La fonction réelle qu'on étudiera sera cette fois, non pas r mais la fonction

$$R(t) = \int_0^t \|u(\tau)\| d\tau$$

La fonction R est définie sur $[0, T]$, nulle en 0. Elle est croissante, de classe C^1 , sa dérivée est $\|u\|$.

Le théorème des accroissements finis appliqué à l'hypothèse du lemme donne

$$\|u(t) - u(0)\| \leq \int_0^t (1 + k\|u(\tau)\|) d\tau$$

qui se traduit facilement par

$$R'(t) \leq 1 + kR(t) \quad R(0) = 0$$

On pose ensuite $R = we^{kt}$. Un calcul facile permet de traduire l'inégalité pour w :

$$w' \leq te^{-kt} \quad w(0) = 0$$

Par intégration (comme dans la première preuve), on obtient

$$w(t) \leq \int_0^t \tau e^{-k\tau} d\tau = \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} t \right) e^{-kt}$$

On écrit la majoration qui en résulte pour R . Enfin, en utilisant $\|u\| \leq 1 + kR$, on obtient le résultat du lemme. ■

Théorèmes d'existence et d'unicité On fait maintenant tendre ε vers zéro. On veut montrer que la solution ε -approchée construite à la proposition 18 converge vers une vraie solution de l'équation différentielle.

Convergence des solutions ε -approchées

Proposition 20 propconvergence Supposons f continue, et localement lipschitzienne en x , dans un voisinage de (t_0, x_0) . Soit ε_n une suite de réels positifs qui tend vers zéro. Soit I un intervalle contenant t_0 . Soit, pour chaque n , une fonction ξ_n , définie sur I , solution ε_n -approchée de l'équation $\dot{x} = f(t, x)$ vérifiant la condition initiale $\xi_n(t_0) = x_0$. Alors, la suite de fonctions ξ_n converge uniformément sur un voisinage de t_0 .

Preuve • On va d'abord choisir des voisinages (le tonnelet de sécurité) avec précaution (en fait, les contraintes qu'on impose sur ces voisinages ne se justifient que par la suite de la démonstration...)

Grâce aux propriétés de f , il existe un voisinage U de (t_0, x_0) , et des constantes positives K et M tels que

$$\forall (t, x) \in U \quad \|f(t, x)\| < M$$

$$(t, x_1) \in U \text{ et } (t, x_2) \in U \Rightarrow \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| < K\|x_1 - x_2\|$$

Choisissons maintenant un r positif suffisamment petit pour que

$$\left[t_0 - \frac{r}{M+1}, t_0 + \frac{r}{M+1} \right] \times \overline{\mathcal{B}(x_0, r)} \subset U$$

Posons encore $I' = I \cap]t_0 - \frac{r}{M+1}, t_0 + \frac{r}{M+1}[$ et supposons (sans nuire à la généralité) que ε_n est toujours inférieur à 1.

- Soit n fixé. On va montrer que la solution ξ_n , restreinte à l'intervalle I' ne sort jamais de la boule $\mathcal{B}(x_0, r)$. Pour cela, supposons (par l'absurde) que ξ_n sorte de la boule. Alors notons s le premier instant supérieur à t_0 dans I' tel que $\|\xi_n(s) - x_0\| = r$. On a les majorations suivantes :

$$\|\xi_n(s) - \xi_n(t_0)\| \leq (s - t_0) \sup_{t \in [t_0, s]} \|\dot{\xi}_n(t)\| \leq (s - t_0)(M + 1) < r$$

d'où une contradiction.

- On va maintenant montrer que (ξ_n) est une suite de fonctions sur I' de Cauchy pour la norme uniforme : soit t quelconque dans I' et p et q des entiers. On a

$$\begin{aligned} \|\dot{\xi}_p(t) - f(t, \xi_p(t))\| &\leq \varepsilon_p \quad \text{et} \quad \|\dot{\xi}_q(t) - f(t, \xi_q(t))\| \leq \varepsilon_q \\ \|\dot{\xi}_p(t) - \dot{\xi}_q(t)\| &\leq \varepsilon_p + \varepsilon_q + \|f(t, \xi_p(t)) - f(t, \xi_q(t))\| \\ \|\dot{\xi}_p(t) - \dot{\xi}_q(t)\| &\leq \varepsilon_p + \varepsilon_q + K\|\xi_p(t) - \xi_q(t)\| \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$u(\tau) = \frac{(\xi_p - \xi_q)(t_0 + \tau)}{\varepsilon_p + \varepsilon_q}$$

La fonction u vérifie exactement les hypothèses du lemme 19. La conclusion du lemme donne alors

$$\|(\xi_p - \xi_q)(t_0 + \tau)\| \leq \frac{1}{K} (e^{K\tau} - 1) (\varepsilon_p + \varepsilon_q)$$

Soit aussi, puisque t reste dans I' :

$$\|\xi_p - \xi_q\| < \frac{1}{K} \left(e^{\frac{K\tau}{M+1}} - 1 \right) (\varepsilon_p + \varepsilon_q)$$

On en déduit immédiatement que la suite ξ_n , restreinte à l'intervalle I' est de Cauchy. Elle converge donc uniformément sur I' . ■

Existence et unicité

On va enfin démontrer le théorème de Cauchy. Avant cela, un lemme utile et facile déplace le problème de Cauchy pour le remplacer par une *équation intégrale* :

Lemme 21 *lemmeequationintegrale* Soit f une fonction continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Soit (t_0, x_0) un point de U . Le problème de Cauchy $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ est équivalent à l'équation intégrale : "trouver toutes les fonctions continues ξ vérifiant "

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau$$

Preuve Elle est immédiate. Il faut juste faire attention à vérifier les propriétés de régularité des solutions... ■

Preuve de l'existence

Le travail a presque été fait dans les pages précédentes :

Soit ε_n une suite de réels positifs tendant vers zéro, par exemple $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. On applique la proposition 18 pour construire une suite ξ_n de solutions ε_n -approchées, définies toutes sur un intervalle commun I .

On applique la proposition 20 pour montrer que la suite ξ_n , restreinte à un intervalle I' est uniformément convergente. Notons ξ la limite de cette suite. C'est une fonction continue, définie sur I' . On va vérifier que c'est une solution de l'équation intégrale :

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \xi(\tau)) d\tau$$

Pour obtenir cette égalité, écrivons que ξ_n est une solution ε_n -approchée :

$$\begin{aligned} \left\| \xi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, \xi_n(\tau)) d\tau \right\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\dot{\xi}_n(\tau) - f(\tau, \xi_n(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\dot{\xi}_n(\tau) - f(\tau, \xi_n(\tau))\| d\tau \leq |t - t_0| \varepsilon_n \end{aligned}$$

Par passage à la limite (n tendant vers l'infini), on obtient l'égalité souhaitée.

Preuve de l'unicité

Supposons, par l'absurde que le problème de Cauchy ait deux solutions locales ξ_1 et ξ_2 définies respectivement sur I_1 et I_2 . Notons I l'intersection de I_1 et I_2 . Il est trivial (et même un peu stupide) de constater que pour tout ε positif, les fonctions ξ_1 et ξ_2 sont des solutions ε -approchées. La suite de fonctions $\xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2, \dots$ vérifie la proposition 20. Elle est donc uniformément convergente sur un voisinage I' de t_0 . Les solutions ξ_1 et ξ_2 coïncident donc sur I' .

Remarque L'unicité des solutions locales, telle qu'elle est énoncée ci-dessus, est à utiliser avec prudence : cependant, elle entraîne une unicité plus forte :

Proposition 22 *Sous les hypothèses du théorème, soit ξ_1 et ξ_2 deux solutions du problème de Cauchy, définies sur I_1 et I_2 respectivement, et à valeurs dans U . Soit $I = I_1 \cap I_2$. Alors ξ_1 et ξ_2 coïncident sur I .*

Preuve Remarquons que le théorème ci-dessus montre déjà que ξ_1 et ξ_2 coïncident sur un intervalle I' , voisinage de t_0 . Supposons, par l'absurde que ξ_1 et ξ_2 ne coïncident pas sur I tout entier. Soit alors t_1 la borne inférieure des instants supérieurs à t_0 où ξ_1 et ξ_2 diffèrent. Par continuité de ξ_1 et ξ_2 , on a $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_1)$. On applique maintenant le théorème d'unicité locale au point $(t_1, \xi_1(t_1))$. Les solutions ξ_1 et ξ_2 doivent donc coïncider sur un voisinage de t_1 , ce qui est contradictoire avec la définition de t_1 . ■