

Espaces métriques, espaces vectoriels normés

Tewfik Sari

**L2 Math**

*Avertissement* : ces notes sont la rédaction, progressive et provisoire, d'un résumé du cours d'espaces métriques et d'espaces vectoriels normés du L2 Math. Les étudiants sont invités à les compléter en rédigeant soigneusement toutes les démonstrations.

# Chapitre 1

## Distances et normes

### 1.1 Définitions

**Définition 1** Soit  $E$  un ensemble. On appelle distance sur  $E$  toute application

$$d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x, y) \mapsto d(x, y),$$

telle que

$$(D1) \quad \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x).$$

$$(D2) \quad \forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(D3) \quad \forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Un espace métrique est un couple  $(E, d)$  où  $E$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $E$ .

**Proposition 1** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On a

$$(D3') \quad \forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \geq |d(x, z) - d(y, z)|.$$

**Exemple.** Soit  $E$  un ensemble. L'application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

est une distance sur  $E$ , appelée la distance triviale.

**Définition 2** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle norme sur  $E$  toute application

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \|x\|,$$

telle que

$$(N1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(N2) \quad \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(N3) \quad \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un espace vectoriel normé (EVN) est un couple  $(E, \| \cdot \|)$  où  $E$  est un espace vectoriel et  $\| \cdot \|$  une norme sur  $E$ .

**Proposition 2** Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un EVN. On a

$$(N3') \quad \forall (x, y) \in E^2, \|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |.$$

**Proposition 3 (Distance associée à une norme)** Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un EVN. L'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ définie par } d(x, y) = \|x - y\|,$$

est une distance sur  $E$ , appelée la distance associée à la norme  $\| \cdot \|$ . Elle vérifie, en plus des conditions (D1), (D2) et (D3) de la définition 1, les propriétés suivantes :

$$(D4) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

$$(D5) \quad \forall (x, y, z) \in E^3, d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

**Proposition 4** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On suppose que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et que la distance  $d$  vérifie aussi les conditions (D4) et (D5) de la proposition 3. Alors l'application  $\| \cdot \| : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\|x\| = d(0, x)$  est une norme sur  $E$ . La distance associée à cette norme est la distance  $d$ .

**Remarque.** La distance triviale  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$  par  $d(x, y) = 1$  si  $x \neq y$  et  $d(x, x) = 0$  n'est associée à aucune norme sur  $\mathbb{R}$  car elle ne vérifie pas la condition (D4).

## 1.2 Exemples

**Normes et distances usuelles sur  $\mathbb{K}^n$ .** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les applications

$$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty, : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

définies, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$ . Les distances associées à ces normes sont définies par

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad d_2(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

La distance  $d_1$  est appelée la distance de Manhattan. La distance  $d_2$  est appelée la distance euclidienne usuelle (si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

**Normes de Hölder sur  $\mathbb{K}^n$ .** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [1, +\infty[$ . L'application

$$\| \cdot \|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur  $\mathbb{K}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$  on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

**Normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .** Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ . L'ensemble  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeur dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les applications

$$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty, : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

définies, pour toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , par

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

sont des normes sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

**Normes de Hölder sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . L'application

$$\| \cdot \|_p : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f \mapsto \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ . Pour tout  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

### 1.3 Suites dans un espace métrique

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une suite dans  $E$  est une application

$$u : \mathbb{N} \rightarrow E, \quad n \mapsto u(n) = u_n,$$

que l'on note aussi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 3** On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  converge vers un élément  $l \in E$ , et on note  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ , si et seulement si la suite numérique  $d(u_n, l)$  converge vers 0. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, l) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow d(u_n, l) \leq \varepsilon).$$

**Proposition 5 (Unicité de la limite)** Si une suite de  $E$  converge vers les éléments  $l_1$  et  $l_2$  de  $E$  alors  $l_1 = l_2$ .

## Chapitre 2

# Voisinages, ouverts, fermés

### 2.1 Boules et voisinages dans un espace métrique

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

**Définition 4** Soient  $a \in E$  et  $r > 0$ . On appelle *boule ouverte* de centre  $a$  et de rayon  $r$  la partie suivante de  $E$

$$B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}.$$

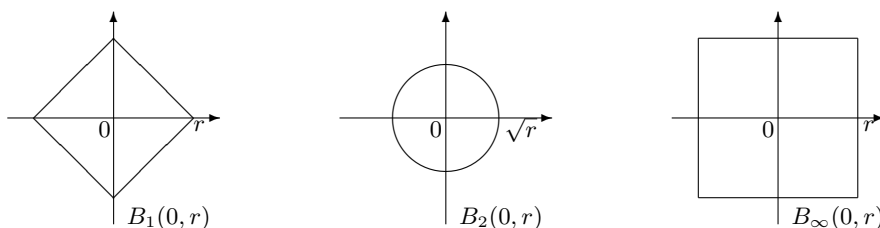
On appelle *boule fermée* de centre  $a$  et de rayon  $r$  la partie suivante de  $E$

$$Bf(a, r) = \{x \in E : d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle *sphère* de centre  $a$  et de rayon  $r$  la partie suivante de  $E$

$$S(a, r) = \{x \in E : d(a, x) = r\}.$$

**Exemples.** Les boules  $B_1(0, r)$ ,  $B_2(0, r)$  et  $B_\infty(0, r)$  de centre 0 et de rayon  $r > 0$  dans  $\mathbb{R}^2$ , muni des distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_\infty$ , sont représentées par :



**Définition 5** Soient  $a \in E$  et  $V \subset E$ . On dit que  $V$  est un *voisinage* de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$ . On note par  $\mathcal{V}(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

**Proposition 6 (Propriétés des voisinages)** Soient  $a \in E$  et  $V$  un voisinage de  $a$ . Alors  $a \in V$  et toute partie de  $E$  qui contient  $V$  est aussi un voisinage de  $a$ . Par ailleurs, pour tous voisinages  $V_1, \dots, V_n$  de  $a$ , leur intersection  $V_1 \cap \dots \cap V_n$  est aussi un voisinage de  $a$ .

**Proposition 7 (Séparation)** Soient  $a \in E$  et  $b \in E$  tels que  $a \neq b$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $a$  et un voisinage  $V$  de  $b$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ . On dit qu'un espace métrique est *séparé*.

## 2.2 Ouverts et fermés dans un espace métrique

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

**Définition 6** On dit qu'une partie  $U \subset E$  est un ouvert de  $E$  si  $U$  est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire

$$U \text{ ouvert de } E \Leftrightarrow \forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U.$$

On dit que  $U$  est un fermé de  $E$  si son complémentaire  $E \setminus U$  est un ouvert de  $E$ .

**Exemples.** Toute boule ouverte de  $E$  est un ouvert de  $E$ . En effet, pour tout  $x \in B(a, r)$  on a  $B(x, r - d(a, x)) \subset B(a, r)$ .

Toute boule fermée de  $E$  est un fermé de  $E$ . En effet, pour tout  $x \notin \overline{B}(a, r)$  on a  $B(x, d(a, x) - r) \subset E \setminus \overline{B}(a, r)$ .

**Proposition 8 (Propriétés des ouverts)** Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

- (i)  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .
- (ii) Toute réunion d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
- (iii) Toute intersection finie d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .

**Proposition 9 (Propriétés des fermés)** Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

- (i)  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés de  $E$ .
- (ii) Toute intersection de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .
- (iii) Toute réunion finie de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .

L'ensemble  $\mathcal{O} = \{U \subset E : U \text{ ouvert de } E\}$  des ouverts d'un espace métrique  $(E, d)$  est appelé *la topologie* de  $(E, d)$ . Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un EVN. Soit  $d$  la distance associée à la norme  $\|\cdot\|$ . La topologie de l'espace métrique  $(E, d)$  est appelée aussi *la topologie* de l'EVN  $(E, \|\cdot\|)$ .

## 2.3 Normes équivalentes

**Définition 7** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ . On dit que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes et on note  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ , si et seulement si il existe des constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que pour tout  $x \in E$  on ait

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|.$$

**Proposition 10** La relation  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$  est une relation d'équivalence (c'est à dire une relation réflexive, symétrique et transitive) sur l'ensemble des normes sur  $E$ .

**Exemple.** Les normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$  sont équivalentes car pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$  on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

**Remarque.** Deux normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes sur  $E$  si et seulement si les ensembles de nombres réels

$$\left\{ \frac{\|x\|}{\|x\|'} : x \in E \setminus \{0\} \right\}, \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\|x\|'}{\|x\|} : x \in E \setminus \{0\} \right\},$$

sont bornés. Par conséquent, s'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E \setminus \{0\}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} = +\infty,$$

alors les normes  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  ne sont pas équivalentes.

**Exemple.** Les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  ne sont pas équivalentes. En effet, soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in ]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a  $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$  et  $\|f_n\|_\infty = n$ . Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = +\infty.$$

**Proposition 11** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $\| \cdot \|$  et  $\| \cdot \|'$  deux normes sur  $E$ . Alors toute suite qui converge vers 0 dans  $(E, \| \cdot \|)$ , converge aussi vers 0 dans  $(E, \| \cdot \|')$ , si et seulement si il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in E$  on ait  $\|x\|' \leq \alpha \|x\|$ .

Par conséquent deux normes ont les mêmes suites convergentes vers 0 si et seulement si elles sont équivalentes.

**Théorème 1** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $\| \cdot \|$  et  $\| \cdot \|'$  deux normes sur  $E$ . Soient  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  les topologies des EVN  $(E, \| \cdot \|)$  et  $(E, \| \cdot \|')$ . On a

$$\| \cdot \| \sim \| \cdot \|' \Leftrightarrow \mathcal{O} = \mathcal{O}'.$$

## 2.4 Intérieur, adhérence

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $A \subset E$ .

**Définition 8** 1. On appelle intérieur de  $A$ , et on note  $A^\circ$ , la réunion des parties ouvertes de  $E$  incluses dans  $A$ . Les éléments de  $A^\circ$  sont appelés les points intérieurs à  $A$ .

2. On appelle adhérence de  $A$ , et on note  $\bar{A}$ , l'intersection des parties fermées de  $E$  contenant  $A$ . Les éléments de  $\bar{A}$  sont appelés les points adhérents à  $A$ .

3. On appelle frontière de  $A$ , et on note  $\text{Fr}(A)$ , la partie  $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$ . Les éléments de  $\text{Fr}(A)$  sont appelés les points frontière de  $A$ .

Comme  $A^\circ$  est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert. En réalité,  $A^\circ$  est le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert contenu dans  $A$ . Comme  $\bar{A}$  est une intersection de fermés, c'est un fermé. En réalité,  $\bar{A}$  est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant  $A$ . Comme  $\text{Fr}(A)$  est une intersection de deux fermés (montrer le !) c'est un fermé.

**Théorème 2** Pour toute partie  $A$  de  $E$  et tout  $x \in E$  on a

$$E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}, \quad E \setminus \bar{A} = (E \setminus A)^\circ.$$

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A = A^\circ, \quad A \text{ fermé} \Leftrightarrow A = \bar{A}.$$

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow A \text{ est un voisinage de } x.$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{Tout voisinage de } x \text{ rencontre } A.$$

**Proposition 12** Pour toutes parties  $A$  et  $B$  de  $E$  on a

$$\overline{\bar{A}} = \bar{A}, \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ.$$

$$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}, \quad A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ.$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}, \quad (A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$$

**Proposition 13 (Caractérisation de l'adhérence en termes de suites)** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $x \in E$  et  $A \subset E$ . Pour que  $x \in \bar{A}$  il faut et il suffit qu'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .



**Exemple** Dans un EVN, l'adhérence d'une boule ouverte de rayon non nul est la boule fermée de même rayon. De même l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon. On a donc :

$$\overline{B(a, r)} = Bf(a, r), \quad \text{et} \quad Bf(a, r)^\circ = B(a, r)$$

Cette propriété est fausse en général dans un espace métrique quelconque (donner un contre exemple).

**Théorème 3** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $A \subset E$ . Pour que la partie  $A$  soit fermée il faut et il suffit que pour toute suite convergente d'éléments de  $A$ , la limite appartienne à  $A$ .

# Chapitre 3

## Suites, limites, continuité

### 3.1 Suites

#### 3.1.1 Convergence

Soit  $(E, \| \cdot \|)$  EVN. Soit  $(u_n)$  une suite dans  $E$ . Rappelons (voir Section 1.3) la notion de convergence.

**Définition 9** On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  converge vers un élément  $l \in E$ , et on note  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ , si et seulement si la suite numérique  $\|u_n - l\|$  converge vers 0. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - l\| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\| \leq \varepsilon).$$

**Proposition 14 (Unicité de la limite)** Si une suite de  $E$  converge vers les éléments  $l_1$  et  $l_2$  de  $E$  alors  $l_1 = l_2$ .

Soient  $(E_1, \| \cdot \|_1)$  et  $(E_2, \| \cdot \|_2)$  deux EVN. L'application

$$\| \cdot \| : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ définie par } \|x\| = \max(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)$$

pour tout  $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ , est une norme sur  $E_1 \times E_2$ . L'espace  $(E_1 \times E_2, \| \cdot \|)$  est appelé l'EVN produit des EVN  $(E_1, \| \cdot \|_1)$  et  $(E_2, \| \cdot \|_2)$ .

**Proposition 15 (Suites à valeur dans un produit)** Soit  $(u_n) = (u_{1,n}, u_{2,n})$  une suite dans  $(E_1 \times E_2, \| \cdot \|)$ . Soit  $l = (l_1, l_2) \in E_1 \times E_2$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1,n} = l_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2,n} = l_2.$$

**Proposition 16 (Propriétés des suites convergentes)** Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un EVN. Soient  $(u_n), (v_n)$  deux suites dans  $E$ . Soit  $(\lambda_n)$  une suite dans  $\mathbb{K}$ . Alors

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \|l\|$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  existent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  existent  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

#### 3.1.2 Valeurs d'adhérence, points d'accumulation

Soit  $(E, d)$  espace métrique. Soit  $(x_n)$  une suite dans  $E$ .

**Définition 10** On appelle suite extraite (ou sous-suite) de la suite  $(x_n)$  toute suite de la forme  $(x_{\sigma(n)})$  avec

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto \sigma(n)$$

strictement croissante. On dit que  $a$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)$  et on note  $a \in VA(x_n)$  si et seulement si  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)}$ , où  $(x_{\sigma(n)})$  est une suite extraite de la suite  $(x_n)$ .

**Proposition 17** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $(x_n)$  une suite dans  $E$ . Soit  $a \in E$ . Alors

$$a \in VA(x_n) \iff \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n \in \mathbb{N} (n \geq N \& d(x_n, a) < \varepsilon).$$

**Définition 11** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $A \subset E$ . Soit  $a \in E$ . On dit que  $a$  est un point d'accumulation de  $A$  si et seulement si tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$  en un point différent de  $a$ . On note par  $A'$  l'ensemble des points d'accumulation de  $A$ . Ainsi on a

$$a \in A' \iff \forall V \in \mathcal{V}(a) V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

**Proposition 18** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $A \subset E$ . Soit  $a \in E$ . Alors

$$a \in A' \iff \text{Il existe } x_n \in A \setminus \{a\} \text{ tel que } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

**Exercice** Soit  $A \subset E$ . On dit que  $a \in A$  est un point isolé de  $A$  si et seulement si il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \cap A = \{a\}$ . On note  $A^*$  l'ensemble des points isolés de  $A$ . Montrer que

$$A^* \cup A' = \overline{A} \quad \text{et} \quad A^* \cap A' = \emptyset.$$

## 3.2 Limites, continuité

Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques. Soit  $X \subset E$ . Soit

$$f : X \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x),$$

une fonction de  $X$  dans  $F$ .

### 3.2.1 Notion de limite

**Définition 12** Soient  $a \in \overline{X}$  et  $l \in F$ . On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in X$  la condition  $d_E(x, a) < \eta$  implique  $d_F(f(x), l) < \varepsilon$ . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X (d_E(x, a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \varepsilon).$$

En d'autres termes on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 f(B_E(a, \eta) \cap X) \subset B_F(l, \varepsilon).$$

**Remarque** Considérons la fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = d_F(f(x), l)$ . D'après la définition précédente

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X (d_E(x, a) < \eta \Rightarrow d_{\mathbb{R}}(g(x), 0) < \varepsilon).$$

Comme  $g(x) \geq 0$  on a  $d_{\mathbb{R}}(g(x), 0) = g(x)$ . Par conséquent on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a} d_F(f(x), l) = 0$$

**Proposition 19 (Caractérisation de la limite en termes de voisinages)** On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall V \in \mathcal{V}_F(l) \exists U \in \mathcal{V}_E(a) f(U \cap X) \subset V.$$

**Théorème 4 (Caractérisation de la limite avec les suites)** On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \text{Pour toute suite } x_n \text{ dans } X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \right).$$

Soient  $(F_1, d_1)$  et  $(F_2, d_2)$  deux espaces métriques. L'application

$$d : (F_1 \times F_2)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ définie par } d(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

pour tout  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  dans  $F_1 \times F_2$ , est une distance sur  $F_1 \times F_2$ . L'espace  $(F_1 \times F_2, d)$  est appelé l'espace métrique produit des espaces métriques  $(F_1, d_1)$  et  $(F_2, d_2)$ .

**Proposition 20 (Fonctions à valeurs dans un produit)** Soit  $f = (f_1, f_2)$  une fonction

$$f : X \rightarrow F_1 \times F_2, \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Soit  $l = (l_1, l_2) \in F_1 \times F_2$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = l_2.$$

**Théorème 5 (Encadrement des limites)** Soit  $X$  une partie d'un espace métrique  $(E, d)$ . Soient  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  pour tout  $x \in X \cap V$ , avec  $V \in \mathcal{V}_E(a)$ ,  $a \in \overline{X}$ . Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l.$$

**Théorème 6 (Composition des fonctions)** Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces métriques. Soit  $f : X \subset E \rightarrow F$  et  $g : Y \subset F \rightarrow G$  telles que  $f(X) \subset Y$ . Soient  $a \in \overline{X}$ ,  $b \in \overline{Y}$  et  $l \in G$ . Alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l.$$

Pour démontrer ce résultat on va utiliser la caractérisation de la limite en termes de voisinages (Proposition 19). Soit  $V \in \mathcal{V}_G(l)$ . Comme  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ , il existe  $W \in \mathcal{V}_F(b)$  tel que  $g(W \cap Y) \subset V$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , il existe  $U \in \mathcal{V}_E(a)$  tel que  $f(U \cap X) \subset W$ . On a aussi  $f(U \cap X) \subset f(X) \subset Y$ , donc  $f(U \cap X) \subset W \cap Y$ . Par conséquent  $g \circ f(U \cap X) \subset g(W \cap Y) \subset V$ .

**Proposition 21 (Propriétés des limites des fonctions à valeurs dans un EVN)** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $(F, \|\cdot\|)$  un EVN. Soient  $f, g : X \subset E \rightarrow F$  des fonctions. Alors

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|l\|$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existent  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

### 3.2.2 Continuité en un point

**Définition 13** Soit  $a \in X$ . On dit que la fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $f(x)$  tend vers  $f(a)$  quand  $x$  tend vers  $a$ . Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } a &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X \ (d_E(x, a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon). \end{aligned}$$

En d'autres termes on a aussi

$$f \text{ continue en } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \ f(B_E(a, \eta) \cap X) \subset B_F(f(a), \varepsilon).$$

**Proposition 22 (Caractérisation de la continuité en termes de voisinages)** On a

$$f \text{ continue en } a \iff \forall V \in \mathcal{V}_F(f(a)) \exists U \in \mathcal{V}_E(a) \ f(U \cap X) \subset V.$$

**Théorème 7 (Caractérisation de la continuité avec les suites)** On a

$$f \text{ continue en } a \iff \text{Pour toute suite } x_n \text{ dans } X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \right).$$

**Proposition 23 (Fonctions à valeur dans un produit)** Soit  $f = (f_1, f_2)$  une fonction

$$f : X \rightarrow F_1 \times F_2, \quad x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Alors

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont continues en } a.$$

**Théorème 8 (Composition des fonctions)** Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces métriques. Soient  $f : X \subset E \rightarrow F$  et  $g : Y \subset F \rightarrow G$  telles que  $f(X) \subset Y$ . Si  $f$  est continue en  $a \in X$ , et si  $g$  est continue en  $b = f(a) \in Y$  alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Proposition 24** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Soit  $(F, \|\cdot\|)$  un EVN. Soient  $f, g : X \subset E \rightarrow F$  des fonctions. Alors

1.  $f$  continue en  $a \Rightarrow \|f\|$  continue en  $a$
2.  $f$  et  $g$  continues en  $a \Rightarrow f + g$  continue en  $a$ .
3.  $f$  continue en  $a \Rightarrow \lambda f$  continue en  $a$ .

### 3.2.3 Continuité sur un ensemble, continuité uniforme

**Définition 14** On dit que la fonction  $f : X \subset E \rightarrow F$  est continue sur  $X$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point  $x \in X$ . On note par  $\mathcal{C}(X, F)$  l'ensemble des fonctions continues de  $X$  dans  $F$ .

**Proposition 25** Soit  $f : E \rightarrow F$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue sur  $X$ .
2. L'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $E$ .
3. L'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $E$ .

**Remarque** L'image directe d'une partie ouverte [resp. fermée] par une application continue peut ne pas être ouverte [resp. fermée]. Donner des exemples.

Bien entendu, lorsque l'ensemble d'arrivée  $F$  est un EVN sur  $\mathbb{K}$ , d'après la proposition 24, on obtient que la somme de deux fonctions continues de  $X$  dans  $F$  est une fonction continue de  $X$  dans  $F$ , et le produit d'une fonction continue par un scalaire est une fonction continue. Par conséquent l'ensemble  $\mathcal{C}(X, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

La continuité d'une fonction sur un ensemble  $X$  se traduit par la propriété

$$\begin{aligned} f \text{ continue sur } X &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ } f \text{ continue en } x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall y \in X (d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon). \end{aligned}$$

Le nombre  $\eta > 0$  dont l'existence est affirmée ici dépend en général de  $\varepsilon$  mais aussi de  $x$ . Lorsqu'il ne dépend pas de  $x \in X$ , on dit que la continuité est uniforme sur  $X$ . On pose alors la définition

**Définition 15** On dit que la fonction  $f : X \subset E \rightarrow F$  est uniformément continue sur  $X$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X \forall y \in X (d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

**Proposition 26** Si  $f$  est uniformément continue sur  $X$  alors  $f$  est continue sur  $X$ .

La réciproque est fautive. En effet, la fonction  $x \rightarrow x^2$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\eta > 0$ . Posons  $x = \frac{1}{\eta}$  et  $y = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}$ . Alors  $|x - y| < \eta$  et

$$|x^2 - y^2| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1.$$

On a montré que

$$\exists \varepsilon = 1 \forall \eta > 0 \exists x = \frac{1}{\eta} \exists y = \frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} (|x - y| < \eta \text{ et } |x^2 - y^2| \geq \varepsilon),$$

ce qui montre que  $x \rightarrow x^2$  n'est pas uniformément continue.

**Proposition 27 (Composition des fonctions)** Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces métriques. Soient  $f : X \subset E \rightarrow F$  et  $g : Y \subset F \rightarrow G$  telles que  $f(X) \subset Y$ . Si  $f$  est uniformément continue sur  $X$ , et si  $g$  est uniformément continue sur  $Y$  alors  $g \circ f$  est uniformément continue sur  $X$ .

### 3.2.4 Homéomorphismes, isométries

Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques. Soient  $X \subset E$  et  $Y \subset F$ .

**Définition 16** On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si  $f$  est bijective et si  $f$  est continue sur  $X$  et  $f^{-1}$  est continue sur  $Y$ . On dit que  $X$  est homéomorphe à  $Y$  s'il existe un homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$ .

**Proposition 28** Si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme alors  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est un homéomorphisme. Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des homéomorphismes alors  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est un homéomorphisme. L'application identité  $Id_X : X \rightarrow X$  est un homéomorphisme.

Par conséquent, la relation "être homéomorphe" est une relation d'équivalence. On déduit de cette proposition que l'ensemble des homéomorphismes de  $X$  sur lui même est un groupe pour la composition des applications. On a le résultat suivant, dont la démonstration est difficile

**Théorème 9 (Brouwer)** Soient  $X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $Y$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , munis de leurs topologies usuelles. Si  $X$  est homéomorphe à  $Y$  alors  $n = m$ .

**Définition 17** On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est une isométrie si  $f$  est bijective et si pour tous  $x$  et  $y$  dans  $X$  on a  $d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y)$ .

**Proposition 29** Si  $f : X \rightarrow Y$  est une isométrie  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est une isométrie. Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des isométries alors  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est une isométrie. L'application identité  $Id_X : X \rightarrow X$  est une isométrie.

On déduit de cette proposition que l'ensemble des isométries de  $X$  sur lui même est un groupe pour la composition des applications. Toute isométrie est un homéomorphisme, mais la réciproque est fautive (donner un exemple).

## 3.3 Applications linéaires

### 3.3.1 Continuité d'une application linéaire

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  des EVN sur  $\mathbb{K}$ . Soit

$$f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x),$$

une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

**Théorème 10** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue en  $0 \in E$
2.  $\exists M > 0 \forall x \in E \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ .
3.  $f$  est continue sur  $E$ .

Montrons que  $1 \Rightarrow 2$ . Comme  $f$  est continue en 0, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall u \in E (\|u\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(u)\|_F \leq 1).$$

Soit  $x \in E \setminus \{0\}$ . Soit  $u = \frac{\eta}{\|x\|_E}x$ . Comme  $\|u\|_E = \eta$ , on a  $\|f(u)\|_F \leq 1$ . Or, par linéarité  $f(u) = \frac{\eta}{\|x\|_E}f(x)$ . Donc  $\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$ . Ainsi  $M = \frac{1}{\eta}$  convient.

Montrons que  $2 \Rightarrow 3$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$ . Alors, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ , par linéarité, on a :

$$\|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq M\|x - y\|_E \leq M\eta = \varepsilon.$$

Par conséquent  $f$  est uniformément continue (et donc continue) sur  $E$ .

Montrons que  $3 \Rightarrow 1$ . Comme  $f$  est continue sur  $E$  elle est continue en tout point de  $E$  et en particulier en  $0 \in E$ .

### 3.3.2 Norme d'une application linéaire

On note par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . D'après la proposition 24, l'ensemble  $\mathcal{C}(X, F)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Nous allons définir une norme sur cet espace. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . D'après la condition 2 du théorème précédent, la partie de  $\mathbb{R}$  définie par

$$\left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

est majorée. Donc elle admet une borne supérieure notée

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On définit ainsi (montrer le) une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$  appelée norme subordonnée aux normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$ .

**Proposition 30** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ . Soient  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  les topologies (c'est à dire l'ensemble des ouverts) des EVN  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(E, \|\cdot\|')$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$
2.  $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$
3.  $Id_E : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|')$  et  $Id_E : (E, \|\cdot\|') \rightarrow (E, \|\cdot\|)$  sont continues.

Pour la démonstration, on sait déjà (voir Théorème 1) que 1  $\Leftrightarrow$  2. Montrons que 1  $\Leftrightarrow$  3. Puisque  $Id_E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ , d'après le théorème 10, la continuité des applications  $Id_E : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|')$  et  $Id_E : (E, \|\cdot\|') \rightarrow (E, \|\cdot\|)$  équivaut à l'existence de deux constantes  $M > 0$  et  $L > 0$  telles que pour tout  $x$  dans  $E$  on ait  $\|x\|' \leq M\|x\|$  et  $\|x\| \leq L\|x\|'$ . Par conséquent, on a

$$\exists \alpha = \frac{1}{L} \exists \beta = M \forall x \in E \alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\| \iff \|\cdot\| \sim \|\cdot\|'.$$

**Exercice** Soient  $E, F$  et  $G$  des EVN. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$ .

# Chapitre 4

## Suites de fonctions

### 4.1 Fonctions à valeurs réelles

Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions définies sur un ensemble  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 18** On dit que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $X$ , si pour tout  $x \in X$ , la suite de nombres réels  $(f(x_n))$  converge. On pose alors  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  et on dit que la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est la limite simple de la suite  $(f_n)$ , ce que l'on note  $f_n \rightarrow f$ . Par conséquent on a

$$f_n \rightarrow f \iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

**Définition 19** On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , ce que l'on note  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ , si la suite  $\mu_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Par conséquent on a

$$f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

**Proposition 31**  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \implies f_n \rightarrow f$ .

La réciproque est fautive. En effet la suite de fonctions  $f_n(x) = x^n$  converge simplement sur  $X = [0, 1[$  vers la fonction  $f(x) = 0$ . La convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1.$$

**Remarque** Pour démontrer la convergence uniforme, il suffit de trouver une suite  $\alpha_n$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et telle que  $\forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ .

**Proposition 32**  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \iff$  pour toute suite  $(x_n)$  dans  $X$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$ .

### 4.2 Fonctions à valeurs dans un espace métrique

Soit  $f_n : X \rightarrow E$  une suite de fonctions définies sur un ensemble  $X$ , à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$ .

**Définition 20** On dit que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $X$ , si pour tout  $x \in X$ , la suite  $(f(x_n))$  de  $E$  converge. On pose alors  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  et on dit que la fonction  $f : X \rightarrow E$  est la limite simple de la suite  $(f_n)$ , ce que l'on note  $f_n \rightarrow f$ . Par conséquent on a

$$f_n \rightarrow f \iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon).$$



**Définition 21** On dit que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers la fonction  $f : X \rightarrow E$ , ce que l'on note  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ , si la suite  $\mu_n = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x))$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Par conséquent on a

$$f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$$

**Proposition 33**  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \implies f_n \rightarrow f$ .

**Proposition 34**  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f \iff$  pour toute suite  $(x_n)$  dans  $X$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x_n), f(x_n)) = 0$ .

## 4.3 Critère de Cauchy

### 4.3.1 Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

**Définition 22** Une suite  $(u_n)$  de nombres réels ou complexes est dite une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon)$$

**Proposition 35** Une suite de nombres réels ou complexes est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

**Remarque** Cette propriété est fautive dans  $\mathbb{Q}$  : il existe une suite de Cauchy de nombres rationnels qui ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ , c'est à dire que la limite de la suite n'est pas rationnelle. Par exemple la suite  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  de nombre rationnels est une suite de Cauchy, car elle converge vers  $e \in \mathbb{R}$ , mais le nombre réel  $e$  n'est pas rationnel.

**Définition 23** Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions.

1. On dit que la suite  $(f_n)$  est de Cauchy sur  $X$ , si pour tout  $x \in X$ , la suite de nombres réels  $(f(x_n))$  est une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon).$$

2. On dit que la suite  $(f_n)$  est uniformément de Cauchy sur  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)$$

De la proposition 35 on déduit le :

**Théorème 11** Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions. Alors

$$(f_n) \text{ converge simplement sur } X \iff \text{La suite } (f_n) \text{ est de Cauchy sur } X.$$

On a aussi le

**Théorème 12** Soit  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions. Alors

$$(f_n) \text{ converge uniformément sur } X \iff \text{La suite } (f_n) \text{ est uniformément de Cauchy sur } X.$$

Pour la démonstration, supposons d'abord que  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $N$  tel que pour tout  $x \in X$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on ait

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent pour tous entiers  $p$  et  $q$  on a

$$p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Réciproquement supposons que la suite  $(f_n)$  est uniformément de Cauchy. Alors pour tout  $x \in X$  la suite de nombres réels  $(f_n(x))$  est de Cauchy. D'après la proposition 35 elle converge vers une limite que l'on note  $f(x)$ . En faisant tendre  $q$  vers l'infini dans

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon),$$

on obtient alors

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall p \in \mathbb{N} (p > N \Rightarrow |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Donc  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ .

### 4.3.2 Espaces métriques complets

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

**Définition 24** Une suite  $(u_n)$  dans  $E$  est dite une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon)$$

**Proposition 36** Toute suite convergente dans  $(E, d)$  est une suite de Cauchy dans  $(E, d)$ .

La réciproque est fautive dans  $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$  comme nous l'avons déjà remarqué. Ceci justifie la définition suivante

**Définition 25** Un espace métrique  $(E, d)$  est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans  $(E, d)$  est une suite convergente dans  $(E, d)$ .

**Exemple**  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  et  $(\mathbb{C}, | \cdot |)$  sont complets.  $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$  n'est pas complet.

**Définition 26** Soit  $f_n : X \rightarrow E$  une suite de fonctions.

1. On dit que la suite  $(f_n)$  est de Cauchy sur  $X$ , si pour tout  $x \in X$ , la suite  $(f(x_n))$  de  $E$  est une suite de Cauchy, c'est à dire

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon).$$

2. On dit que la suite  $(f_n)$  est uniformément de Cauchy sur  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon).$$

On a le

**Théorème 13** Soit  $f_n : X \rightarrow E$  une suite de fonctions, avec  $(E, d)$  un espace métrique complet. Alors

$$(f_n) \text{ converge simplement sur } X \iff \text{La suite } (f_n) \text{ est de Cauchy sur } X.$$

$$(f_n) \text{ converge uniformément sur } X \iff \text{La suite } (f_n) \text{ est uniformément de Cauchy sur } X.$$

## 4.4 Norme de la convergence uniforme

Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un EVN sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $\mathcal{B}(X, E)$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des fonctions bornées  $f : X \rightarrow E$  définies sur un ensemble  $X$  et prenant leurs valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur  $\mathcal{B}(X, E)$ . On a les résultats suivants

**Proposition 37** Soit  $f_n : X \rightarrow E$  une suite de fonctions. Alors

$$(f_n) \text{ converge uniformément sur } X \iff (f_n) \text{ converge dans } (\mathcal{B}(X, E), \| \cdot \|_\infty).$$

$$(f_n) \text{ uniformément de Cauchy sur } X \iff (f_n) \text{ de Cauchy dans } (\mathcal{B}(X, E), \| \cdot \|_\infty).$$

**Théorème 14** Si  $(E, \| \cdot \|)$  est complet alors  $(\mathcal{B}(X, E), \| \cdot \|_\infty)$  est complet.

## 4.5 Propriétés des limites de suites

### 4.5.1 Continuité

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $f_n : X \rightarrow F$  définies sur  $X \subset E$  à valeurs dans  $F$ , avec  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques. Soit  $x_0 \in X$ . On a le

**Théorème 15 (Continuité de la limite)** *Si les fonctions  $f_n$  sont continues en  $x_0$  et si  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$  alors la limite  $f$  est continue en  $x_0$ .*

Le résultat est faux si la convergence n'est pas uniforme. Par exemple, la suite  $f_n(x) = x^n$  définie sur  $X = [0, 1]$  converge vers la fonction discontinue  $f$ , définie par  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 1$ .

Pour la démonstration il suffit de "couper les  $\varepsilon$  en trois". En effet, soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ , il existe  $n_0$  tel que

$$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} \left( n > n_0 \Rightarrow d_F(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Fixons un entier  $n > n_0$ . Comme  $f_n$  est continue en  $x_0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in X \left( d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Par conséquent pour tout  $x \in X$ , si  $d_E(x, x_0) < \delta$ , alors

$$d_F(f(x), f(x_0)) \leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(x_0)) + d_F(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon),$$

c'est à dire que  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Théorème 16 (Inversion des limites)** *Supposons que  $(F, d_F)$  soit un espace métrique complet. Soit  $a \in \overline{X}$ . Si les limites  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$  existent et si  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$  alors la limite  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$  existe et on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . En d'autres termes on a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Pour la démonstration : comme la suite  $f_n$  est uniformément de Cauchy on a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in X \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d_F(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon).$$

En faisant tendre  $x$  vers  $a$  on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d_F(l_p, l_q) \leq \varepsilon).$$

Par conséquent la suite  $(l_n)$  est de Cauchy dans  $F$ . Comme  $F$  est complet, elle converge vers  $l \in F$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ , il existe  $n_0$  tel que

$$\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} \left( n > n_0 \Rightarrow d_F(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Comme  $l_n \rightarrow l$ , il existe  $n_1$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \left( n > n_1 \Rightarrow d_F(l_n, l) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Fixons un entier  $n > \max(n_0, n_1)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = l_n$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in X \left( d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f_n(x), l_n) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Par conséquent pour tout  $x \in X$ , si  $d_E(x, a) < \delta$ , alors

$$d_F(f(x), l) \leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), l_n) + d_F(l_n, l) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (d_E(x, a) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \varepsilon),$$

c'est à dire que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

**Exercice** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $f_n : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = l_n$  existent et que  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ . Montrer que la limite  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$  existe et que l'on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ . En d'autres termes on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$

### 4.5.2 Intégration

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On a le

**Théorème 17 (Intégration de la limite)** Supposons que les  $f_n$  soient continues sur  $[a, b]$  et  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$  alors  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ . En d'autres termes on a

$$\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Comme les  $f_n$  sont continues sur  $[a, b]$ , par le théorème 15 la limite  $f$  est continue sur  $[a, b]$ . Donc l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  existe. On a

$$\left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \mu_n(b - a),$$

où  $\mu_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$ . Or  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ , donc  $\mu_n \rightarrow 0$ . Par conséquent

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \rightarrow 0.$$

Le théorème 17 reste vrai si l'hypothèse  $f_n$  continues sur  $[a, b]$  est remplacée par l'hypothèse  $f_n$  continue par morceaux sur  $[a, b]$ . Pour s'assurer que l'intégrale de la limite ait un sens, on peut exiger que la limite  $f$  est aussi continue par morceaux sur  $[a, b]$ . En effet, on a le

**Théorème 18** Supposons que les  $f_n$  soient continues par morceaux sur  $[a, b]$  et  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ . Supposons que la limite  $f$  soit continue par morceaux sur  $[a, b]$ . Alors  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx$ .

Le théorème n'est pas vrai si la suite de fonction ne converge pas uniformément. Par exemple la suite de fonctions  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ ou } x = 0, \\ n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Alors  $f_n \rightarrow 0$ , mais la convergence n'est pas uniforme. Par ailleurs

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

### 4.5.3 Dérivabilité

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert. On a le

**Théorème 19 (Dérivation de la limite)** *Supposons que les  $f_n$  soient de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , que  $f_n \rightarrow f$  et que  $f'_n \xrightarrow{\text{UNIF}} g$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et on a  $f' = g$ . En d'autres termes on a*

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n)'.$$

Par ailleurs  $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$  sur tout intervalle  $[a, b] \subset I$ .

**Remarque** C'est la convergence uniforme de la suite  $f'_n$  qui importe. La convergence uniforme de la suite  $f_n$  toute seule ne donne rien. En effet la suite  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers 0, mais la suite des dérivées  $f'_n(x) = \cos(nx)$  n'a pas de limite. D'un autre côté, sous les hypothèses du théorème 19 on ne peut pas espérer la convergence uniforme de la suite  $f_n$  sur tout l'intervalle  $I$ , mais seulement sur les parties fermées et bornées de  $I$ . Pour s'en convaincre, considérer la suite de fonctions  $f_n(x) = \arctan \frac{x}{n}$  définies sur  $\mathbb{R}$ .

Pour la démonstration : soient  $x$  et  $x_0$  fixés dans  $I$ . On a

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Par le théorème 17, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , le deuxième membre de l'égalité tend vers  $\int_{x_0}^x g(t) dt$ . Par hypothèse le premier terme tend vers  $f(x) - f(x_0)$ . Par l'unicité de la limite on a donc

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Par conséquent  $f' = g$ . Par le théorème 15,  $g$  est continue sur  $I$ . Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . La convergence est uniforme sur toute partie  $[a, b] \subset I$  car

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f'_n(t) dt - \int_a^x g(t) dt + f_n(a) - f(a) \right| \\ &\leq |b - a| \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - g(x)| + |f_n(a) - f(a)|. \end{aligned}$$

Donc  $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

# Chapitre 5

## Compacité et complétude

### 5.1 Rappels sur les propriétés des intervalles fermés et bornés

**Théorème 20 (Théorème de Bolzano Weierstrass)** Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé et borné. Toute suite  $(x_n)$  dans  $[a, b]$  admet une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$  convergente telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma(n)} \in [a, b]$ .

Pour la démonstration on peut utiliser le principe de dichotomie : l'une au moins des moitiés  $[a, \frac{a+b}{2}]$  ou  $[\frac{a+b}{2}, b]$  de l'intervalle  $[a, b]$  contient une infinité de valeurs de la suite  $(x_n)$ . Notons cet intervalle moitié  $[a_1, b_1]$  et choisissons un élément de la suite  $x_{\sigma(1)} \in [a_1, b_1]$ . L'une au moins des moitiés  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  ou  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$  de l'intervalle  $[a_1, b_1]$  contient une infinité de valeurs de la suite  $(x_n)$ . Notons cet intervalle moitié  $[a_2, b_2]$  et choisissons un élément de la suite  $x_{\sigma(2)} \in [a_2, b_2]$  avec  $\sigma(2) > \sigma(1)$ . En itérant ce procédé on construit une suite d'intervalles emboîtés  $[a_n, b_n]$  et une suite  $(x_{\sigma(n)})$  telle que  $\sigma(n+1) > \sigma(n)$  et  $a_n \leq x_{\sigma(n)} \leq b_n$ . Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes car

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Par conséquent elle convergent toutes les deux vers la même limite  $c \in [a, b]$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma(n)} = c$ .

**Théorème 21 (Fonctions continues sur un intervalle fermé et borné)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors

1.  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes.
2.  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

### 5.2 Parties compactes d'un espace métrique

**Définition 27** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une partie  $A \subset E$  est dite compacte si et seulement si toute suite dans  $A$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $A$ .

On dit que  $E$  est compact si et seulement si  $E$  est une partie compacte de  $E$ .

**Exemples** Tout intervalle fermé et borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  est un compact dans  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ . L'intervalle  $]0, 1[$  n'est pas compact (montrer le). L'intervalle  $[0, +\infty[$  n'est pas compact (montrer le).

**Exercices** 1. Un EVN  $(E, \| \cdot \|)$ , tel que  $E \neq \{0\}$  n'est pas compact.

2. Soit  $(x_n)$  une suite convergente dans un espace métrique  $(E, d)$ . La partie

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \}$$

est compacte.

**Proposition 38** Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée et bornée.

Soit  $A$  une partie compacte de l'espace métrique  $E$ . Montrons que  $A$  est fermée. Soit  $(x_n)$  une suite convergente d'éléments de  $A$ . Comme  $A$  est compacte, elle admet une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$ , qui converge vers  $x \in A$ . Donc  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$ . D'après le théorème 3,  $A$  est fermé.

Montrons que  $A$  est borné. Fixons  $x_0$  dans  $E$ . Supposons  $A$  non borné, alors

$$\forall C > 0 \exists x \in A \ d(x, x_0) \geq C.$$

En appliquant cette propriété à  $C = n$  où  $n$  est un entier, on obtient un élément  $x_n$  dans  $A$  tel que  $d(x, x_0) \geq n$ . Comme  $A$  est compact la suite  $(x_n)$  admet une sous-suite  $(x_{\sigma(n)})$ , qui converge vers  $x \in A$ . Il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $d(x_{\sigma(n)}, x) < 1$ . On en déduit donc que pour tout  $n \geq n_0$  on a

$$d(x_{\sigma(n)}, x_0) \leq d(x_{\sigma(n)}, x) + d(x, x_0) < 1 + d(x, x_0),$$

ce qui est absurde car  $d(x_{\sigma(n)}, x_0) \geq \sigma(n)$  et  $\sigma(n)$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini.

**Proposition 39** *Toute partie fermée d'un compact est compacte.*

Soit  $A$  un compact de  $E$  et soit  $B$  un fermé de  $E$ . Supposons que  $B \subset A$ . Soit  $(x_n)$  une suite dans  $B$ . Puisque  $B \subset A$ ,  $(x_n)$  est une suite dans  $A$ . Comme  $A$  est compact, la suite  $(x_n)$  admet une sous suite qui converge vers un élément  $l \in A$ . Comme  $B$  est fermée, on  $l \in B$ . Ainsi toute suite dans  $B$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $B$ . Donc  $B$  est compact.

**Proposition 40** *Le produit de deux compacts est compact.*

**Théorème 22** *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Attention, l'image réciproque d'un compact par une fonction continue n'est pas compacte en général.

**Théorème 23** *Si  $A \subset E$  et  $B \subset F$  alors*

$$A \times B \text{ est compact} \iff A \text{ et } B \text{ sont compacts.}$$

### 5.3 Fonctions continues sur un compact

**Théorème 24** *Soit  $X$  une partie compacte d'un espace métrique. Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $X$ . Alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes, c'est à dire qu'il existe  $x_{\min} \in X$  et  $x_{\max} \in X$  tels que*

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in X} f(x), \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in X} f(x).$$

**Théorème 25 (Théorème de Heine)** *Soient  $E$  et  $F$  des espaces métriques. Soit  $X$  une partie compacte de  $E$ . Soit  $f : X \rightarrow F$  une fonction continue sur  $X$ . Alors  $f$  est uniformément continue sur  $X$ .*

### 5.4 Cas de la dimension finie

**Proposition 41** *Une partie de  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$  est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

**Théorème 26** *Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EVN de dimension finie. Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.*

**Théorème 27** *Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EVN de dimension finie. Une partie de  $E$  est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

**Théorème 28** *Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -EVN. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $E$  est de dimension finie alors  $f$  est continue.*

## 5.5 Complétude

Rappelons la définition d'une suite de Cauchy. Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

**Définition 28** Une suite  $(u_n)$  dans  $E$  est dite une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall p \in \mathbb{N} \forall q \in \mathbb{N} (p > N \text{ et } q > N \Rightarrow d(u_p, u_q) < \varepsilon)$$

**Proposition 42** 1. Toute suite convergente dans  $(E, d)$  est une suite de Cauchy dans  $(E, d)$ .

2. Toute suite de Cauchy dans  $(E, d)$  est bornée dans  $(E, d)$ .

3. Soit  $(u_n)_n$  une suite de Cauchy admettant une sous-suite qui converge. Alors la suite  $(x_n)$  converge vers la même limite que sa sous-suite.

Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  deux espaces métriques. Rappelons que l'application

$$d : (E \times F)^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ définie par } d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_E(x_1, x_2), d_F(y_1, y_2))$$

est une distance sur  $E \times F$ . L'espace  $(E \times F, d)$  est appelé l'espace métrique produit des espaces métriques  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$ .

**Proposition 43 (Suites à valeur dans un produit)** Soit  $(u_n) = (x_n, y_n)$  une suite dans  $(E \times F, d)$ . Alors

$$(x_n, y_n) \text{ suite de Cauchy dans } E \times F \iff (x_n) \text{ suite de Cauchy dans } E \text{ et } (y_n) \text{ suite de Cauchy dans } F.$$

**Définition 29** Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Une partie  $A \subset E$  est dite complète si et seulement si toute suite de Cauchy dans  $A$  est convergente vers un élément de  $A$ .

Par conséquent  $E$  est complet si et seulement si  $E$  est une partie complète de  $E$ . Un EVN complet est appelé un espace de Banach.

**Exercice** Soient  $N$  et  $N'$  des normes sur  $E$ . Si  $N \sim N'$  et si  $(E, N)$  est complet alors  $(E, N')$  est complet.

**Proposition 44** Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.

Soit  $A$  une partie complète de l'espace métrique  $E$ . Montrons que  $A$  est fermée. Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $A$  convergente vers  $l \in E$ . Puisque  $(x_n)$  converge, c'est une suite de Cauchy. Comme  $A$  est complète, la suite  $(x_n)$  converge vers un élément de  $A$ . Donc  $l \in A$ . Ainsi toute suite convergente d'éléments de  $A$  a sa limite dans  $A$ . Donc  $A$  est fermée.

**Proposition 45** Toute partie fermée d'une partie complète est complète.

Soit  $A$  une partie complète de  $E$  et soit  $B$  un fermé de  $E$ . Supposons que  $B \subset A$ . Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $B$ . Puisque  $B \subset A$ ,  $(x_n)$  est une suite de Cauchy dans  $A$ . Comme  $A$  est complète, la suite  $(x_n)$  converge vers un élément de  $l \in A$ . Comme  $B$  est fermée, on  $l \in B$ . Ainsi toute suite de Cauchy dans  $B$  converge vers un élément de  $B$ . Donc  $B$  est complète.

**Proposition 46** Toute partie compacte d'un espace métrique est complète.

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ . Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $A$ . Comme  $A$  est compacte, la suite  $(x_n)$  admet une sous-suite qui converge vers un élément de  $l \in A$ . D'après la proposition 42, elle converge elle-même vers  $l$ . Ainsi toute suite de Cauchy dans  $A$  converge vers un élément de  $A$ . Donc  $A$  est complète.

La réciproque de est fautive. En effet  $\mathbb{R}$  est complet mais non compact.

**Théorème 29** Soit  $A$  une partie complète de  $E$  et  $B$  une partie complète de  $F$ . Leur produit  $A \times B$  est une partie complète de  $E \times F$ .

**Théorème 30** Tout EVN de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est complet.



## 5.6 CNS de Cauchy d'existence d'une limite pour une fonction à valeurs dans un espace métrique complet

Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques. Soit  $X \subset E$ . Soit

$$f : X \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x),$$

une fonction de  $X$  dans  $F$ . Soient  $a \in \overline{X}$  et  $l \in F$ . On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X (d_E(x, a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \varepsilon).$$

**Théorème 31** *On suppose que  $F$  est complet. Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in X \forall x' \in X (d_E(x, a) < \eta \text{ et } d_E(x', a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

# Chapitre 6

## Approximation uniforme des fonctions

### 6.1 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier

Dans cette section  $E$  désigne un EVN sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  de dimension finie. On rappelle que  $E$  est complet et que toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

#### 6.1.1 Fonctions en escalier

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ . On appelle subdivision de  $[a, b]$  tout ensemble fini  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  de nombres réels tels que

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b.$$

**Définition 30** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow E$  est dite en escalier si et seulement s'il existe une subdivision  $s = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  et des éléments  $(y_0, \dots, y_n) \in E^n$  tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\} \forall t \in ]a_i, a_{i+1}[ f(t) = y_i.$$

**Définition 31** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow E$  est dite continue par morceaux si et seulement s'il existe une subdivision  $s = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  la restriction  $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$  soit continue et admette une limite à gauche en  $a_i$  et une limite à droite en  $a_{i+1}$ .

**Théorème 32** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux. Il existe une suite  $(f_n)$  de fonctions en escaliers  $f_n : [a, b] \rightarrow E$  qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Proposition 47 (Théorème de Riemann-Lebesgue)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème 32, il existe une fonction en escalier  $g$  telle que  $\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Considérons une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  telle que  $g(t) = l_k$  pour tout  $t \in ]a_k, a_{k+1}[$  et tout  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ . Soit  $x > 0$ . On a

$$\int_a^b g(t) e^{ixt} dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} l_k e^{ixt} dt = \sum_{k=0}^{N-1} l_k \frac{e^{ixa_{k+1}} - e^{ixa_k}}{ix}.$$

Par conséquent

$$\left| \int_a^b g(t) e^{ixt} dt \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |l_k| \frac{2}{x} \leq \frac{2NM}{x}, \quad \text{où} \quad M = \max_{0 \leq k \leq N-1} |l_k|.$$

Soit  $A = \frac{4NM}{\varepsilon}$ , alors pour tout  $x > A$  on a  $\frac{2NM}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ , et donc

$$\left| \int_a^b f(t)e^{ixt} dt \right| \leq \left| \int_a^b (f(t) - g(t))e^{ixt} dt \right| + \left| \int_a^b g(t)e^{ixt} dt \right| < (b-a)\|f - g\|_\infty + \frac{2NM}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 \forall x \in \mathbb{R} (x > A \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)e^{ixt} dt \right| < \varepsilon).$$

C'est à dire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt} dt = 0$ .

### 6.1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux

**Définition 32** Soit  $e : [a, b] \rightarrow E$  une fonction en escalier telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et pour tout  $t \in ]a_i, a_{i+1}[$  on ait  $e(t) = y_i$ . On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  l'élément  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)y_i$  de  $E$ . On le note

$$\int_{[a,b]} e = \int_a^b e = \int_a^b e(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)y_i.$$

**Théorème 33** Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  une fonction continue par morceaux. Pour toutes les suites  $(f_n)$  de fonctions en escaliers sur  $[a, b]$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ , la suite  $\left(\int_a^b f_n\right)$  converge dans  $E$  vers une même limite, appelée l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et notée

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

## 6.2 Approximation par des polynômes

### 6.2.1 Polynômes de Bernstein

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue.

**Définition 33** Le polynôme défini, pour tout  $x \in [0, 1]$ , par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

est appelé polynôme de Bernstein associé à  $f$ .

**Proposition 48** La suite  $B_n(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

### 6.2.2 Théorème de Weierstrass

**Théorème 34** Pour toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  il existe une suite  $(P_n)$  de polynômes  $P_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  convergeant uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

# Bibliographie

- [1] **C. Derschamps, A. Warusfel, F. F. Ruaud, F. Moulin, J-C. Sifre, A. Miquel**, *Mathématiques, tout-en-un. 2e année MP*, Editions Dunod, Paris (2004).
- [2] **J.-M. Monier**, *Analyse MP*, Dunod , Paris (2004).
- [3] **J. Vauthier, C. Cazes, M. Krée, P. Krée, A.- C. Vauthier**, *Cours de Mathématiques, Algèbre, Analyse, Géométrie*, Editions Eska, Paris (2006).

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Distances et normes</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Définitions . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Exemples . . . . .  | 2         |
| 1.3      | Suites dans un espace métrique . . . . .                              | 3         |
| <b>2</b> | <b>Voisinages, ouverts, fermés</b>                                    | <b>4</b>  |
| 2.1      | Boules et voisinages dans un espace métrique . . . . .                | 4         |
| 2.2      | Ouverts et fermés dans un espace métrique . . . . .                   | 5         |
| 2.3      | Normes équivalentes . . . . .   | 5         |
| 2.4      | Intérieur, adhérence . . . . .  | 6         |
| <b>3</b> | <b>Suites, limites, continuité</b>                                    | <b>8</b>  |
| 3.1      | Suites . . . . .  | 8         |
| 3.1.1    | Convergence . . . . .   | 8         |
| 3.1.2    | Valeurs d'adhérence, points d'accumulation . . . . .                  | 8         |
| 3.2      | Limites, continuité . . . . .   | 9         |
| 3.2.1    | Notion de limite . . . . .  | 9         |
| 3.2.2    | Continuité en un point . . . . .                                      | 10        |
| 3.2.3    | Continuité sur un ensemble, continuité uniforme . . . . .             | 11        |
| 3.2.4    | Homéomorphismes, isométries . . . . .                                 | 12        |
| 3.3      | Applications linéaires . . . . .                                      | 12        |
| 3.3.1    | Continuité d'une application linéaire . . . . .                       | 12        |
| 3.3.2    | Norme d'une application linéaire . . . . .                            | 13        |
| <b>4</b> | <b>Suites de fonctions</b>  | <b>14</b> |
| 4.1      | Fonctions à valeurs réelles . . . . .                                 | 14        |
| 4.2      | Fonctions à valeurs dans un espace métrique . . . . .                 | 14        |
| 4.3      | Critère de Cauchy . . . . .   | 15        |
| 4.3.1    | Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .          | 15        |
| 4.3.2    | Espaces métriques complets . . . . .                                  | 16        |
| 4.4      | Norme de la convergence uniforme . . . . .                            | 16        |
| 4.5      | Propriétés des limites de suites . . . . .                            | 17        |
| 4.5.1    | Continuité . . . . .  | 17        |
| 4.5.2    | Intégration . . . . .   | 18        |
| 4.5.3    | Dérivabilité . . . . .  | 19        |
| <b>5</b> | <b>Compacité et complétude</b>  | <b>20</b> |
| 5.1      | Rappels sur les propriétés des intervalles fermés et bornés . . . . . | 20        |
| 5.2      | Parties compactes d'un espace métrique . . . . .                      | 20        |
| 5.3      | Fonctions continues sur un compact . . . . .                          | 21        |
| 5.4      | Cas de la dimension finie . . . . .                                   | 21        |
| 5.5      | Complétude . . . . .  | 22        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.6      | CNS de Cauchy d'existence d'une limite pour une fonction à valeurs dans un espace métrique complet . . . . . | 23        |
| <b>6</b> | <b>Approximation uniforme des fonctions</b>  | <b>24</b> |
| 6.1      | Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier .                  | 24        |
| 6.1.1    | Fonctions en escalier . . . . .  | 24        |
| 6.1.2    | Intégration des fonctions continues par morceaux . . . . .   | 25        |
| 6.2      | Approximation par des polynômes . . . . .  | 25        |
| 6.2.1    | Polynômes de Bernstein . . . . .   | 25        |
| 6.2.2    | Théorème de Weierstrass . . . . .  | 25        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>26</b> |