Université de Haute Alsace, Faculté des Sciences et Techniques
L3 Chimie et Physique

Examen final de mathématiques
14/12/2006 — Durée: 2 heures,
Documents autorisés (uniquement les notes du cours)

Exercice 1 (*6 points*) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On considère la fonction

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

1. En utilisant la transformée de Fourier $U(t, \xi) = \mathcal{F}[u(t, x)]$, résoudre le problème

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(0, x) = f_n(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

On note $u_n(t, x)$ la solution de (1).

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t, x) = u(t, x)$, avec

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Montrer que $u(t, x)$ est une solution de l'équation de la chaleur $u_t = a^2 u_{xx}$.

Exercice 2 (*10 points*) On se propose de résoudre le problème suivant

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u = 0, \qquad t > 0,\ 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(t, 0) = 0 = u(t, l), \qquad t \geq 0, \tag{3}$$

$$u(0, x) = f(x),\ u_t(0, x) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{4}$$

1. Ecrire les deux problèmes que doivent satisfaire les fonctions $T(t)$ et $X(x)$ pour que la fonction $u(t, x) = T(t)X(x)$ soit une solution du problème (2,3). Résoudre ces deux problèmes.

2. En déduire que le problème (2,3) admet des solutions de la forme

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)\right] \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{5}$$

avec $\omega_k = \sqrt{1 + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$. Calculer les coefficients A_k et B_k dans la série (5) pour que la solution vérifie aussi les conditions initiales (4).

Exercice 3 (*4 points*) Dans l'expérience qui consiste à "lancer deux dés", on considère la variable aléatoire

$$X = \text{somme des 2 chiffres obtenus.}$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.