T.Sari, M.Mbaye

2006-2007

1. Soit l' équation différentielle, dite Bessel :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \nu \geq 0\,(\text{un réel}) \quad (1)$$

a) Pour $\nu = 0$ résoudre (1) en passant par un développement en série entière au voisinage de zéro, la solution obtenue notée $y(x) = J_0(x)$ est appelée la fonction de bessel J_0.
b) Donner le rayon de convergence de la série $J_0(x)$.

2. La fonction de bessel du premier type d'ordre $n \in \mathbb{N}$ est notée :

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}(\frac{x}{2})^{2m+n}$$

a) Donner le rayon de convergence de la série et ses propriétés.
b) Montrer que $\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x)$
c) Montrer que $\int_0^r xJ_0(x)dx = rJ_1(r)$

3. Soit la fonction Γ d'Euler : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, cette intégrale converge pour tout $x > 0$.
a) Montrer que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x on a :

$$\Gamma(x+m+1) = (x+1)(x+2)\dots(x+m)\Gamma(x+1).$$

c) Calculer $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(7/2)$
d) On note $J_\nu = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}(\frac{x}{2})^{2m+\nu}$ solution particulière de l'équation de Bessel (1). Démontrer que

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{et} \quad J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$