Université de Haute Alsace
FST – L2 Math.
Année universitaire 2005-2006

Examen final de fonctions de plusieurs variables
(mai 2006, durée 3h)

Exercice 1. *2 points*
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable. Les dérivées partielles sont-elles continues ?

Exercice 2. *4 points*
Soient $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ des nombres réels. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = xy(c - ax - by).$$

Quelle est la nature des points critiques de f ?

Exercice 3. *4 points*
On considère les ouverts de $\mathbb{R}^2$

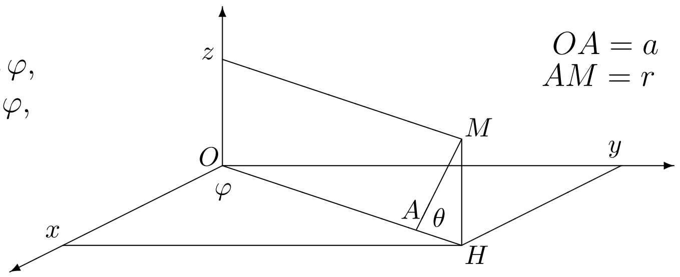
$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0 \text{ et } v > 0\} \quad \text{et} \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}.$$

1) Montrer que l'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ définie par $u = xy$, $v = y^2 - x^2$ est un difféomorphisme de V dans U.
2) Déterminer les images réciproques par ce difféomorphisme des demi droites $u =$ Constante de l'ouvert U. Déterminer les images réciproques par ce difféomorphisme des demi droites $v =$ Constante de l'ouvert U.
3) Soit $D = \{(x,y) \in U : 1 \leq xy \leq 2 \text{ et } 1 \leq y^2 - x^2 \leq 4\}$. Dessiner D et calculer l'intégrale double

$$\int\int_D \frac{xy(x^2+y^2)}{y^2-x^2} dxdy.$$

Exercice 4. *3 points*
Soient $a > R > 0$ des nombres réels. Calculer le volume du tore, obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oz, le disque du plan vertical xOz de centre $(a, 0)$ et de rayon R.
Indication : Utiliser les variables (r, θ, φ) définies par (voir figure)

$$\begin{cases} x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi, \\ z = r\sin\theta. \end{cases}$$



Exercice 5. *4 points*
On considère les fonctions

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{sh}(t-x)dt.$$

1) Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ on a

$$F''(x) - F(x) = -\frac{\sin x}{x} \quad \text{et} \quad G''(x) - G(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

2) On pose $y(x) = F(x) - G(x)$. Montrer que $y''(x) - y(x) = 0$. Calculer $y(0)$ et $y'(0)$ et en déduire que

$$F(x) = \frac{\pi}{4}\mathrm{ch}x + G(x).$$

Exercice 6. *3 points*
Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$I = \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad J = \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

où C est le cercle de centre l'origine et de rayon $r > 0$, parcouru dans le sens positif, et γ est le cercle de centre un point $(a, b) \neq (0, 0)$ et de rayon $r > 0$, avec $r < \sqrt{a^2+b^2}$, parcouru dans le sens positif.

Bon courage ! La clarté et la précision de la rédaction
seront particulièrement appréciées du correcteur (la concision aussi).