Les théorèmes fondamentaux de l’analyse et rudiments d’algèbre

Tewfik Sari

L1 Math Info

Chapitre 1

Groupes, Anneaux et Corps

1.1 Groupes

Définition 1 *Un groupe $(G, *)$ est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$, (c'est à dire une application $(a, b) \in G \times G \mapsto a * b \in G$) vérifiant les propriétés suivantes :*
G1. Associativité : pour tous éléments a, b, c de G on a $(a * b) * c = a * (b * c)$.
G2. Il existe un élément neutre e tel que pour tout a de G on ait $a * e = e * a = a$.
G3. Tout élément admet symétrique, c'est à dire que pour tout a de G, il existe a' de G tel que $a*a' = a'*a = e$.
Le groupe $(G, *)$ est dit commutatif si de plus $a * b = b * a$ pour tous a et b de G.

Exercices
$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \times)$ ne sont pas des groupes.
$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs.
$(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Q}, \times)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{C}, \times)$ ne sont pas des groupes.
$(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.
$(\mathbb{Z}^*, \times)$ n'est pas un groupe.
L'ensemble $gl(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ des matrices 2×2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

est un groupe commutatif. Muni de la multiplication des matrices,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

ce n'est pas un groupe.
L'ensemble $Gl(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in gl(2, \mathbb{R}) : ad - bc \neq 0 \right\}$ des matrices 2×2 de déterminant non nul, muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif.

Proposition 1 *Dans un groupe il y a un unique élément neutre. Chaque élément a admet un unique symétrique, noté a^{-1}. L' équation $a * x = b$ admet une unique solution $x = a^{-1} * b$. De même l' équation $x * a = b$ admet une unique solution $x = b * a^{-1}$.*

Exercice Démontrer cette proposition.

1.2 Anneaux

Définition 2 *Un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ vérifiant les propriétés suivantes :*
A1. $(A, +)$ est un groupe commutatrif.
A2. La loi $\times$ est associative.
A3. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$, c'est à dire pour tous a, b, c de A,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ et } (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

L'anneau $(A, +, \times)$ est dit commutatif si de plus la loi $\times$ est commutative, unitaire si la loi $\times$ possède un élement neutre.

Exercices
$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs unitaires.
$(gl(2, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

Proposition 2 *Dans un anneau il y a un unique élément neutre pour la loi $+$, on le note 0. Dans un anneau unitaire il y a un unique élément neutre pour la loi $\times$, on le note 1. Chaque élément a admet un unique symétrique pour la loi $+$, noté $-a$. L' équation $a \times b = 0$ n'implique pas $a = 0$ ou $b = 0$.*

Exercice Démontrer cette proposition.

1.3 Corps

Définition 3 *Un corps $(K, +, \times)$ est un ensemble K muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ vérifiant les propriétés suivantes :*
K1. $(K, +, \times)$ est un anneau unitaire.
K2. Chaque élément non nul (c'est à dire distinct de l'élément neutre de la loi $+$) admet un inverse pour la loi $\times$.
Si, de plus, la loi $\times$ est commutative, le corps $(K, +, \times)$ est dit commutatif.

Exercices
$(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.
$(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps.
$(gl(2, \mathbb{R}), +, \times)$ n'est pas un corps.
$(Gl(2, \mathbb{R}), +, \times)$ est-il un corps ?

Proposition 3 *Dans un corps chaque élément non nul a admet un unique symétrique pour la loi $\times$, noté a^{-1}. L' équation $a \times x = b$, avec $a \neq 0$ admet une unique solution $x = a^{-1} \times b$. Dans un corps $a \times b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.*

Exercice Démontrer cette proposition.

Chapitre 2

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

2.1 Ensembles ordonnés

Soit E un ensemble. Une relation sur E est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. On note

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}.$$

Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite

1. Réflexive si et seulement si pour tout $a \in E$, $a\mathcal{R}a$.
2. Symétrique si et seulement si pour tout $a, b \in E$, $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
3. Antisymétrique si et seulement si pour tout $a, b \in E$, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$.
4. Transitive si et seulement si pour tout $a, b, c \in E$, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Définition 4 *Une relation d'équivalence sur E est une relation réflexive, symétrique et transitive. La classe d'équivalence d'un élément de $a \in E$ est l'ensemble*

$$\overline{a} = \{b \in E : a\mathcal{R}b\}$$

des éléments en relation avec a.

Exercice Montrer que sur $\mathbb{N}$, la relation $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \ a$ et b ont le même reste dans la division par 5, notée $a = b \mod 5$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$. Quelles sont les classes d'équivalence ?.
Montrer que sur l'ensemble des droites du plan la relation "être parallèle ou confondue" est une relation d'équivalence.

Définition 5 *Une relation d'ordre sur E est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. L'ordre sur E est dit total si pour tout $a, b \in E$ on a ou bien $a\mathcal{R}b$, ou bien $a\mathcal{R}b$.*

Exercice Montrer que la relation $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ divise b, notée $a|b$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. L'ordre est-il total ?
Montrer que la relation $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. L'ordre est-il total ?
Soit E un ensemble. Montrer que la relation $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subseteq B$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de E. L'ordre est-il total ?

2.2 Corps ordonné

Un corps ordonné est un corps $(K, +, \times)$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ compatible avec les lois $+$ et $\times$, c'est à dire
1. Pour tous x, y et $z \in K$, $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$.
2. Pour tous x, $y \in K$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ implique $0 \leq x \times y$.

Théorème 1 *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps commutatif commutatifs totalement ordonnés.*

On peut résumer ainsi les propriétés des nombres réels (le produit $x \times y$ est noté xy) :

1. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$,
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 + x = 0$,
4. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = 0$,
5. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x(y + z) = xy + xz$,
6. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x(yz) = (xy)z$,
7. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $xy = yx$,
8. pour tous $x \in \mathbb{R}$, $1x = x$,
9. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $xx^{-1} = 1$.
10. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$,
11. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x$, implique $x = y$,
12. pour tous x, y, $z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$,
13. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$,
14. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$,
15. pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ implique $0 \leq xy$,

Théorème 2 *$\mathbb{R}$ et aussi archimédien, ce qui signifie qu'il satisfait à l' axiome d'Archimède :*
pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x$ et $0 \leq y$ il existe un entier n tel que $y \leq nx$.

Chapitre 3

$\mathbb{R}$ est complet

On a vu dans le chapitre 2 que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps commutatifs totalement ordonnés. Dans la suite du ce chapitre on va mettre en évidence une propriété (la complétude) que possède $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas satisfaite dans $\mathbb{Q}$.

3.1 Bornes supérieure et inférieure

Définition 6 *Soit E un ensemble ordonné par une relation notée $\leq$. Soit A une partie de E. On dit que $m \in E$ est un(e)*

- **majorant** *de A si $\forall a \in A$, $a \leq m$.*
- **minorant** *de A si $\forall a \in A$, $m \leq a$.*
- **borne supérieure** *de A (notée $\mathrm{Sup}A$), si m est un majorant de A et si pour tout majorant m' de A on a $m \leq m'$ (donc m est le plus petit majorant).*
- **borne inférieure** *de A (notée $\mathrm{Inf}A$), si m est un minorant de A et si pour tout minorant m' de A on a $m' \leq m$ (donc m est le plus grand minorant).*

Proposition 4 *La borne supérieure (ou la borne inférieure), si elle existe, est unique.*

Exercice Démontrer cette proposition.

La borne supérieure ou inférieure n'existe pas toujours. Par exemple dans $\mathbb{Q}$, muni de la relation d'ordre $\leq$, la partie

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

est majorée mais n'admet pas de borne supérieure (montrer le). Par contre la partie A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. D'ailleurs on a

Axiome de la borne supérieure Toute partie majorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, c'est à dire que s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$, alors il existe M_0 tel que

$$M_0 = \mathrm{Sup}A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A\ x \leq M_0, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\ M_0 - \varepsilon < x. \end{cases}$$

On a aussi que toute partie minorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, c'est à dire que s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \geq m$, alors il existe m_0 tel que

$$m_0 = \mathrm{Inf}A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A\ x \geq m_0, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\ m_0 + \varepsilon > x. \end{cases}$$

Proposition 5 *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que pour tous réels a et b tels que $a < b$, il existe un rationnel r tel que $a < r < b$.*

3.2 $\mathbb{R}$ est complet

Définition 7 *On dit qu'une suite u_n converge vers l et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. On écrit alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists N\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

Définition 8 *On dit qu'une suite u_n est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n, m > N$ on ait $|u_n - u_m| < \varepsilon$. On écrit alors*

$$u_n \text{ de Cauchy} \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists N\; \forall n, m \in \mathbb{N}\; (n, m > N \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon)$$

Toute suite convergente est une suite de Cauchy (montrer le) mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple une suite de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ (il en existe à cause de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (pourquoi ?), mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (puisque sa limite est $\sqrt{2}$ et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). On dit que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Théorème 3 *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente dans $\mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.*

Chapitre 4

Compléments sur les groupes

4.1 Morphismes de groupe, sous-groupe d'un groupe

Définition 9 *On dit qu'une application $f : G_1 \to G_2$ est un morphisme (on dit aussi homomorphisme) du groupe $(G_1, *_1)$ dans le groupe $(G_2, *_2)$ si pour tous $x, y \in G_1$ on a*

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$$

Si de plus f est bijectif on dit que f est un isomorphisme.

Exercice
Trouver un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.
Existe-t-il un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Q}^{+*}, \times)$.
Montrer que si $f : G_1 \to G_2$ est un morphisme alors
  $f(e_1) = e_2$, où e_1 et e_2 sont les éléments neutres de G_1 et G_2.
  pour tout $x \in G_1$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Définition 10 *Soit $(G, *)$ un groupe. On dit qu'une partie H de G est un sous-groupe de $(G, *)$ si H est stable pour la loi $*$ (c'est à dire $x * y \in H$ pour tous $x, y \in H$) et si $(H, *)$ est un groupe.*

Proposition 6 *Une partie non vide H de G est un sous-groupe de $(G, *)$, si et seulement si pour tous $x, y \in H$, on a $x * y^{-1} \in H$.*

PREUVE. Montrons la réciproque. Comme H est non vide, il existe $x \in H$. On a donc $e = x * x^{-1} \in H$. Soit $x \in H$, comme $e, x \in H$ on a $x^{-1} = e * x^{-1} \in H$. Pour la stabilité, soient $x, y \in H$. Comme $x, y^{-1} \in H$, on a $x * y = x * \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$. Comme l'associativité est satisfaite dans G, elle est satisfaite dans H. Ce qui achève la démonstration.

Théorème 4 *Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe. Soit H_1 un sous-groupe de G_1, alors $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2. Soit H_2 un sous-groupe de G_2, alors $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.*

PREUVE. Montrons que $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2. Soient $u, v \in f(H_1)$. Alors il existe $x, y \in H_1$ tels que $u = f(x)$ et $v = f(y)$. Comme H_1 est un sous-groupe de G_1 on a $x *_1 y^{-1} \in H_1$. Comme f est un morphisme on a

$$u *_2 v^{-1} = f(x) *_2 (f(y))^{-1} = f(x) *_2 f(y^{-1}) = f(x *_1 y^{-1}). \tag{4.1}$$

Donc $u *_2 v^{-1} \in f(H_1)$. Donc $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2

Montrons que $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1. Soient $x, y \in f^{-1}(H_2)$. Alors $u = f(x) \in H_2$ et $v = f(y) \in H_2$. Comme H_2 est un sous-groupe de G_2 on a $u *_2 v^{-1} \in H_2$. Utilisant (4.1) on voit que $x *_1 y^{-1} \in f^{-1}(H_2)$. Donc $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1. Ce qui achève la démonstration.

Dans les cas particuliers $H_1 = G_1$ et $H_2 = \{e_2\}$, on obtient les sous-groupes image et noyau.

Définition 11 (Noyau et Image d'un morphisme). *Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe. On appelle image de f le sous groupe $\mathrm{Im} f = f(G_1)$ de G_2 et noyau de f le sous groupe $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{e_2\})$ de G_1.*

Exercice Soit $f : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{e_1\}$.

4.2 Groupe des permutations

Soit E un ensemble et G l'ensemble des bijections de E dans E.

Exercice Montrer que G, muni de la loi de composition des applications $f \circ g$ est un groupe, en général non abelien.

Le groupe des permutations $\mathcal{S}_n$ est le groupe de toutes les bijections de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ sur lui même, muni de la loi de composition des applications. L'élément est l'application identié, c'est à dire l'application $e = (1 \cdots n)$. Le groupe $\mathcal{S}_n$ possède $n!$ éléments.

Exemple Le groupe $\mathcal{S}_2$ possède 2 éléments : l'élément neutre e défini par $e(1) = 1$, $e(2) = 2$ et la bijection t définie par $t(1) = 2$, $t(2) = 1$, qu'on convient de noter alors $t = (12)$ pour signifier que les éléments 1 et 2 sont échangés par t. On appelle t une transposition. La table de $\mathcal{S}_2$ est

$\circ$	e	t
e	e	t
t	t	e

Le groupe $\mathcal{S}_3$ possède 6 éléments : e, les transpositions $t_1 = (12)$. $t_2 = (23)$ et $t_3 = (13)$ et les permutations circulaires $c_1 = (123)$ et $c_2 = (132)$. Noter que les bijection t_1, t_2 et t_3 vérifient

$$t_1(1) = 1, \qquad t_1(2) = 3, \qquad t_1(3) = 2.$$

$$t_2(1) = 3, \qquad t_2(2) = 2, \qquad t_2(3) = 1.$$

$$t_3(1) = 2, \qquad t_3(2) = 1, \qquad t_3(3) = 3.$$

On les appelle des transpositions, car elle n'échangent que deux éléments. Noter que les bijection c_1 et c_2 vérifient

$$c_1(1) = 2, \qquad c_1(2) = 3, \qquad c_1(3) = 1.$$

$$c_2(1) = 3, \qquad c_2(2) = 1, \qquad t_2(3) = c.$$

Ecrire la table du groupe $\mathcal{S}_3$.

Exercice Soit $m > n$. Montrer que l'application $f : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_m$ qui à $\sigma \in \mathcal{S}_n$ associe $f(\sigma)$ définie par

$$f(\sigma)(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{si} \quad 1 \leq k \leq n \\ k & \text{si} \quad n+1 \leq k \leq m \end{cases}$$

est un homomorphisme injectif de groupes.
Montrer que $\mathcal{S}_3$ n'est pas abelien et en déduire que $\mathcal{S}_n$ n'est pas abelien pour $n \geq 3$.

4.3 Groupes de symétrie du triangle équilatéral et du carré

On se propose d'étudier le groupe G des isométries du plan qui laissent globalement invariant un triangle équilateral (A, B, C), muni de la loi de composition des applications.

Exercices 1. Montrer que c'est bien un groupe.
2. Montrer qu'il est isomorphe à $\mathcal{S}_3$.

On se propose d'étudier le groupe G des isométries du plan qui laissent globalement invariant un carré (A, B, C, D), muni de la loi de composition des applications.

Exercices 1. Montrer que c'est bien un groupe.
2. Montrer que c'est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$.
3. Montrer que G contient 8 éléments
4. Déterminer les sous-groupes de G.

Chapitre 5

Suites de nombres réels

Une suite de nombres réels est une application $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qu'on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou, plus simplement, (u_n). L'ensemble des suites de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les opérations

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \qquad \lambda(u_n) = (\lambda u_n),$$

où λ est un nombre réel. On définit les notions suivantes de suites

$$\begin{array}{lcl} u_n \text{ croissante} & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geq u_n, \\ u_n \text{ décroissante} & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \leq u_n, \\ u_n \text{ majorée} & \Leftrightarrow & \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq M, \\ u_n \text{ minorée} & \Leftrightarrow & \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq m. \end{array}$$

5.1 Suites convergentes

Définition 12 *On dit qu'une suite u_n converge vers l et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. On écrit alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists N\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

On dit qu'une suite u_n tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $A < u_n$. On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\; \exists N\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n > N \Rightarrow u_n > A)$$

On dit qu'une suite u_n tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$ on ait $u_n < -A$. On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\; \exists N\; \forall n \in \mathbb{N}\; (n > N \Rightarrow u_n < -A)$$

Proposition 7 (Unicité de la limite). *La limite, si elle existe, est unique.*

Théorème 5 (Opérations algébriques sur les limites). *Si $\lim_{n\to\infty} u_n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n$ existent et sont finies alors, pour tous réels λ et μ, $\lim_{n\to\infty}(\lambda u_n + \mu v_n)$ et $\lim_{n\to\infty}(u_n v_n)$ existent et on a*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} u_n + \mu \lim_{n\to\infty} v_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Si, de plus, $\lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ existe et on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n}.$$

Ces résultats restent "vrais" si l'une des deux limites (ou les deux) est infinie, sauf pour les cas d'indétermination bien connus

$$\infty - \infty, \qquad 0\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

Théorème 6 (Théorème des gendarmes) *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *des suites de nombres réels telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = l$, *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.

Exercice Démontrer ce théorème.

Proposition 8 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *des suites de nombres réels. Alors*
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ *et* (u_n) *et* (v_n) *convergent alors* $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$.

Exercice Démontrer cette proposition.

5.2 Suites monotones

Théorème 7 *Toute suite croissante et majorée de nombres réels converge (vers sa borne supérieure). Toute suite décroissante et minorée de nombres réels converge (vers sa borne inférieure).*

Exercice Démontrer ce théorème.

Définition 13 *On dit que les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont adjacentes si* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante et* $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 8 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Exercice Démontrer ce théorème.

Chapitre 6

Limites de fonctions

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point a, sauf peut-être au point a, c'est à dire que $I =]c, a[\cup]a, b[$ avec $-\infty \leq c < a < b \leq +\infty$.

6.1 Notion de limite

Définition 14 *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet l comme limite (ou tend vers l) quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a - \delta < x < a$ ou $a < x < a + \delta$ on ait $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. On écrit alors*

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On dit que f admet l comme limite à droite quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a < x < a + \delta$ on ait $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. On écrit alors

$$\lim_{x \to a, x > a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On dit que f admet l comme limite à gauche quand x tend vers a, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a - \delta < x < a$ on ait $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. On écrit alors

$$\lim_{x \to a, x < a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

De ces définitions on déduit immédiatement que

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ \lim_{x \to a, x > a} f(x) = \lim_{x \to a, x < a} f(x) = l$$

Définition 15 *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a - \delta < x < a$ ou $a < x < a + \delta$ on ait $f(x) > A$. On écrit alors*

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow \ \forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A).$$

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $a - \delta < x < a$ ou $a < x < a + \delta$ on ait $f(x) < -A$. On écrit alors

$$\lim_{x \to a, x \neq a} f(x) = -\infty \ \Leftrightarrow \ \forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -A).$$

6.2 Propriétés des limites

Proposition 9 (Unicité de la limite). *La limite, si elle existe, est unique.*

Théorème 9 (Opérations algébriques sur les limites). *Si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existent et sont finies alors* $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ *et* $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ *existent et on a*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \qquad \lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

Si, de plus, $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$*, alors* $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$ *existe et on a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Ces résultats restent "vrais" si l'une des deux limites (ou les deux) est infinie, sauf pour les cas d'indétermination bien connus

$$\infty - \infty, \qquad 0\infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

Théorème 10 (Caractérisation avec les suites) *On a que* $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$ *si et seulement si pour toute suite* x_n *qui tend vers* a*, avec* $x_n \neq a$*, la suite* $f(x_n)$ *tend vers l.*

Exercice Démontrer ce théorème.

6.3 Limites en l'infini

On considère une fonction $f : I =]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

Définition 16 *On dit que* f *admet* l *comme limite (ou tend vers* l*) quand* x *tend vers* $+\infty$*, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x > B$ *on ait* $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x > B <\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On dit que f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si pour tout* $A > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x > B$ *on ait* $f(x) > A$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x > B \Rightarrow f(x) > A).$$

On dit que f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si pour tout* $A > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x > B$ *on ait* $f(x) < -A$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x > B \Rightarrow f(x) < -A).$$

On considère une fonction $f : I =]-\infty, a[\to \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

Définition 17 *On dit que* f *admet* l *comme limite (ou tend vers* l*) quand* x *tend vers* $-\infty$*, si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x < -B$ *on ait* $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x < -B <\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On dit que f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si pour tout* $A > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x < -B$ *on ait* $f(x) > A$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x < -B \Rightarrow f(x) > A).$$

On dit que f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si pour tout* $A > 0$*, il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in I$ *vérifiant* $x < -B$ *on ait* $f(x) < -A$*. On écrit alors*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall A > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I\ (x < -B \Rightarrow f(x) < -A).$$

Chapitre 7

Continuité

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point a, c'est à dire que $I =]c, b[$ avec $-\infty \leq c < a < b \leq +\infty$. Par conséquent f est définie en a.

7.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 18 *On dit que f est continue au point a si elle admet $f(a)$ comme limite quand x tend vers a. On écrit alors*

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } a \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Théorème 11 (Caractérisation avec les suites) *La fonction f est continue au point a si et seulement si pour toute suite x_n qui tend vers a, la suite $f(x_n)$ tend vers $f(a)$.*

Théorème 12 (Opérations algébriques sur les fonctions continues). *Si f et g sont continues en a alors $f + g$ et fg le sont aussi. Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Exercice Démontrer ce théorème.

Définition 19 *On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point x de I, c'est à dire*

$$\begin{aligned} &f \text{ continue sur } I \;\Leftrightarrow \\ &\forall x \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x' \in I \; (|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon). \end{aligned}$$

On dit que f est uniformément continue sur I si elle est continue en tout point x de I et si le δ de la définition peut être choisi indépendant de x, c'est à dire

$$\begin{aligned} &f \text{ uniformément continue sur } I \;\Leftrightarrow \\ &\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I \; \forall x' \in I \; (|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon). \end{aligned}$$

7.2 Fonctions continues sur $[a, b]$

Théorème 13 (Théorème des valeurs intermédiaires.) *Si f est continue sur $[a, b]$, et si l est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = l$.*

Corollaire 1 *Si f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Exercice Démontrer le théorème et son corollaire.

Pour démontrer les deux théorèmes suivants on a besoin du résultat suivant sur les suites à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Une suite v_n est dite une sous-suite, ou une suite extraite de la suite u_n s'il existe une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que $v_n = u_{\phi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 14 (Théorème de Bolzano Weierstrass.) *Toute suite dans $[a, b]$ admet une sous suite qui converge vers $c \in [a, b]$.*

Exercice Démontrer ce théorème, en utilisant la méthode de dichotomie.

Théorème 15 *Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes inférieure et supérieure, c'est à dire qu'il existe $x_{\max} \in [a, b]$ et $x_{\min} \in [a, b]$ tels que*

$$x_{\max} = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \qquad x_{\min} = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Théorème 16 *Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Chapitre 8

Théorème de la base incomplète

Le but de ce chapitre est de dḿontrer qu'un espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs possède une base, et que toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs appelé la dimension de l'espace.

Soit E un espace vectoriel sur le corps K ($K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Théorème 17 (Théorème de la base incomplète). *Soit E un espace vectoriel et soient $g_1, \cdots, g_q$ des vecteurs de E. On suppose que E est engendré par les vecteurs $g_1, \cdots, g_q$. Soient $f_1, \cdots, f_p$ des vecteurs de E linéairement indépendants. Alors il existe une base $e_1, \cdots, e_n$ de E, avec $n \geq p$ telle que*

$$e_i = f_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } e_j \in \{g_1, \cdots, g_q\} \text{ pour } p+1 \leq j \leq n.$$

8.1 Rappels et definitions

Définition 20 *On dit que les vecteurs $f_1, \cdots, f_p$ de E sont linéairement indépendants si pour tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de K on a*

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Définition 21 *On dit que l'espace E est engendré par les vecteurs $g_1, \cdots, g_q$ si pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ de K tels que $x = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_q g_p$.*

Définition 22 *On dit que l'espace $e_1, \cdots, e_n$ est une base de E si les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ sont linéairement indépendants et s'ils engendrent E.*

Proposition 10 *Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de E, alors pour tout $x \in E$ il existe des uniques $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de K tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$.*

Proposition 11 *Soit $x_1, \cdots, x_p$ des vecteurs de E linéairement indépendants, et y un vecteur de E, alors y est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \cdots, x_p$ si et seulement si les vecteurs $x_1, \cdots, x_p, y$ ne sont pas linéairements indépendants.*

Proposition 12 *Supposons que E possède une base formée de n vecteurs. Si $m > n$ est un entier, alors m vecteurs de E ne peuvent pas être linéairemnt indépendants.*

Exercice Démontrer ces propositions.

Théorème 18 *Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.*

Pour démontrer ce théorème il suffit d'appliquer la proposition précédente à deux bases $e_1, \cdots, e_n$ et $f_1, \cdots, f_m$ de E. Puisque les m vecteurs $f_1, \cdots, f_m$ sont linéairemnt indépendants et que les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ forment une base on a $m \leq n$. Puisque les m vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ sont linéairemnt indépendants et que les vecteurs $f_1, \cdots, f_m$ forment une base on a $n \leq m$. Il s'ensuit $n = m$.

8.2 Existence de bases

Démonstration du théorème de la base incomplète Premier cas : supposons que pour tout entier j le vecteur g_j est une combinaison linéaire des vecteurs $f_1, \cdots, f_p$. Puisque tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, \cdots, g_q$, il s'ensuit que tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $f_1, \cdots, f_p$. Donc $f_1, \cdots, f_p$ engendrent E. Comme ils sont linéairement indépendants, ils constituent donc une base de E.

Deuxième cas : supposons qu'il existe un vecteur g_j qui ne soit pas une combinaison linéaire des vecteurs $f_1, \cdots, f_p$. Alors par la proposition 11, les vecteurs $f_1, \cdots, f_p, g_j$ sont linéairement indépendants. Soit alors k le plus grand entier, compris entre 1 et q pour lequel il existe des vecteurs $g_{j_1}, \cdots, g_{j_k}$ tels que les vecteurs $f_1, \cdots, f_p, g_{j_1}, \cdots, g_{j_k}$ sont linéairement indépendants. Posons

$$e_1 = f_1, \cdots, e_p = f_p, e_{p+1} = g_{j_1}, \cdots, e_{p+k} = g_{j_k}.$$

Montrons que les vecteurs $e_1, \cdots, e_n$, avec $n = p + k$, forment une base de E. Comme ils sont linéairement indépendants, il suffit de montrer qu'il engendrent E. Tout vecteur g_j, avec $j \notin \{j_1, \cdots, j_k\}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$. En effet, si le vecteur g_j n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$, alors par la proposition 11, les vecteurs $e_1, \cdots, e_n, g_j$ seraint linéairement indépendants, ce qui conterdit le fait que k est le plus grand entier pour lequel les vecteurs $f_1, \cdots, f_p, g_{j_1}, \cdots, g_{j_k}$ sont linéairement indépendants. Puisque tous les vecteurs $g_1, \cdots, g_q$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ et que tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, \cdots, g_q$, il s'ensuit que tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$. Donc $e_1, \cdots, e_n$ engendrent E.

Ceci achève la démonstration du théorème de la base incomplète.

Proposition 13 *Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs. Alors E admet une base.*

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le théorème de la base incomplète à un vecteur non nul f_1 quelconque de E, qui forme bien entendu une famille de vecteurs linéairemnt indépendants.

Chapitre 9

Dérivabilité

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du point a, c'est à dire que $I =]c, b[$ avec $-\infty \leq c < a < b \leq +\infty$. Par conséquent f est définie en a.

9.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 23 *On dit que f est dérivable au point a s'il existe un nombre réel L et une fonction ε telles que*

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \qquad \textit{et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Autrement dit le nombre réel L est la limite quand x tend vers a du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Par unicité de la limite, le nombre L est unique. On l'appelle la dérivée de f au point a et on le note $L = f'(a)$. Ainsi

$$f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Théorème 19 (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables). *Si f et g sont dérivables en a alors $f + g$ et fg le sont aussi. Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivables en a.*

Exercice Démontrer ce théorème.

Définition 24 *On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.*

Proposition 14 *Si f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.*

9.2 Fonctions dérivables sur $[a, b]$

Théorème 20 (Théorème de Rolle). *Si f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Corollaire 2 (Théorème des accroissements finis). *Si f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Exercice Démontrer le théorème et son corollaire.

Chapitre 10

Applications linéaires

10.1 Sommes directes

Définition 25 *On dit qu'un espace vectoriel E est la somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et G de E et on note $E = F \oplus G$ si $F \cap G = \{0\}$ et si pour tout $x \in E$ il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$.*

Notons que si E est de dimension finie et $E = F \oplus G$ alors on a $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème 21 (Supplementaire d'un sous-espace vectoriel) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E, alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$. On dit que G est un supplémentaire de F dans E.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer une base $f_1, \cdots, f_p$ de F et de la compléter (en utilisant le théorème de la base incomplète) en une base $f_1, \cdots, f_p, f_{p+1}, \cdots, f_n$ de E, où $n \geq p$ est la dimension de E. Le sous-espace vectoriel G de E engendré par les vecteurs $f_{p+1}, \cdots, f_n$ vérifie alors (montrer le) $E = F \oplus G$.

10.2 Isomorphisme d'espace vectoriel

Soient E et F des espaces vectoriels sur le corps K.

Définition 26 *On dit qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si pour tous $x, y \in E$ et tous scalaires λ, $\mu \in K$ on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*
Si de plus f est bijective on dit que f est un isomorphisme de E dans F.

Exercice
Montrer que si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est aussi linéaire. C'est donc un isomorphisme de F dans E. Montrer que si E est de dimension finie et f est un isomorphisme de E dans F, alors E et F sont de même dimension.

Théorème 22 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit H un sous-espace vectoriel de E, alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F. Soit K un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(K)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Dans les cas particuliers $H = E$ et $K = \{0\}$, on obtient les sous-espaces vectoriels image et noyau.

Définition 27 (Noyau et Image d'une application linéaire). *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle image de f le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im} f = f(E)$ de F et noyau de f le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ de E.*

Exercice Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

10.3 Formule des dimensions

Théorème 23 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie. Alors* $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

Pour démontrer ce théorème on considère un supplémentaire S de $\mathrm{Ker} f$ dans E et l'application $g : S \to \mathrm{Im} f$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in S$. Alors f est un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im} f$ (montrer le). Donc $\dim S = \dim \mathrm{Im} f$. Comme on a $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim S$, on en déduit la formule des dimensions.

Chapitre 11

Formules de Taylor

11.1 Formules de Taylor globales

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b dans I.

Théorème 24 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange). *Il existe c compris entre a et b tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Noter que pour $n = 0$ on retrouve la formule des accroissements finis

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c).$$

Pour démontrer ce ce théorème, on applique le théoreème de Rolle à la fonction

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right] \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

On constate que $g(a) = 0 = g(b)$. Comme g est dérivable, il existe c tel que $g'(c) = 0$. Or on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left[k(b-x)^{k-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} - \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k \right] \\ &+ (n+1)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + (n+1)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right]. \end{aligned}$$

De $g'(c) = 0$ on déduit

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

qui est la formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Théorème 25 (Formule de Taylor avec reste intégral). *On a*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème on fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt,$$

qui est vrai. Supposons alors la formule vraie au rang n. En utilisant une intégration par parties on montre que le reste s'écrit

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt. \end{aligned}$$

11.2 Formule de Taylor locale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x \in I$. On suppose que f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n au point x, c'est à dire que les érivées f',f'',...,$f^{(n-1)}$ existent dans un voisinage de x et $f^{(n)}(x)$ existe aussi.

Théorème 26 (Formule de Taylor avec reste de Young). *Il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et telle que*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f^{'}(x)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + +h^n\varepsilon(h).$$

Pour démontrer ce théorème on fait une récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a

$$f(x+h) = f(x) + \varepsilon(h).$$

C'est la continuité de f au point x. Supposons alors la formule vraie au rang n. Soit f une fonction admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ au point x. Alors sa dérivée $g = f'$ admet des dérivées jusquà l'ordre n. Donc

$$g(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x)}{k!}h^k + h^n\varepsilon(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}h^k + h^n\varepsilon(h).$$

En intégrant de 0 à h terme à terme ce développement limité on obtient

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}\frac{h^{k+1}}{k+1} + h^{n+1}\varepsilon_1(h).$$

C'est à dire

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + h^{n+1}\varepsilon_1(h).$$

Chapitre 12

Intégration

12.1 Intégrale de Riemann des fonctions en escalier

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Une subdivision de $[a,b]$ et une suite fine et strictement croissante de points de $[a,b]$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Définition 28 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction en escalier, s'il exitse un subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$, telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$, pour $0 \leq i \leq n-1$. Une telle subdivision est dite associée à f.*

Définition 29 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ une subdivision associée à f et soit $c_i = f_{|]x_i, x_{i+1}[}$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ la somme notée*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i. \tag{12.1}$$

Exercice Montrer que l'intégrale d'une fonction en escalier f ne dépend pas de la subdivision σ associée à f qui est utilisée pour la calculer par la formule (12.1).

Proposition 15 (Propriétés de l'intégrale) *Notons par $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Relation de Chasles. *Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b])$ et tout $c \in [a,b]$ on a $f \in \mathcal{E}([a,c])$ et $f \in \mathcal{E}([c,b])$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Linéarité. *Pour tous f et g dans $\mathcal{E}([a,b])$ et tous réels λ et μ on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}([a,b])$ et*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Croissance. *Soient f et g dans $\mathcal{E}([a,b])$. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Par conséquent, si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
Majoration. *Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b])$ on a $|f| \in \mathcal{E}([a,b])$ et*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz. *Pour tous f et g dans $\mathcal{E}([a,b])$ on a $fg \in \mathcal{E}([a,b])$ et*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Exercice Démontrer les résultats de cette proposition.

12.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Dans la section précédente on a montré comment intégrer les fonctions en escalier, qui sont des cas particuliers de fonctions bornées. Dans cette section nous allons intégrer des fonctions bornées plus générales en les encadrant par des fonctions en escalier. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Exercice Démontrer que, comme f est bornée, l'ensemble $\mathcal{E}_+(f)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui majorent f sur $[a,b]$ est non vide, ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}_-(f)$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui sont majorées par f sur $[a,b]$.

Soient φ et ψ des fonctions en escalier telles que $\psi \leq f \leq \varphi$ sur $[a,b]$. On a $\int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$. Par conséquent, l'ensemble

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \in \mathcal{E}_+(f)\right\}$$

est minoré. De même l'ensemble

$$\left\{\int_a^b \psi(x)dx : \psi \in \mathcal{E}_-(f)\right\}$$

est majoré. Par conséquent on peut définir les nombres

$$\mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx \text{ et } \mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx$$

Exercice Démontrer que les nombres $\mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx$ et $\mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx$ existent et qu'il vérifient l'inégalité

$$\mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx \leq \mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx.$$

Ces deux nombres peuvent vérifier l'inégalité stricte

$$\mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx < \mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx$$

comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Définition 30 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est intégralble au sens de Riemann sur $[a,b]$ si les nombres $\mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx$ et $\mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx$ sont égaux et on note alors*

$$\int_a^b f(x)dx := \mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_a^b \varphi(x)dx = \mathrm{Sup}_{\psi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_a^b \psi(x)dx.$$

qu'on appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$. On note par $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

Proposition 16 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, si et seulement si pour pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier ψ et φ telles que $\psi \leq f \leq \varphi$ sur $[a, b]$ et $\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))dx < \varepsilon$.*

Exercice Démontrer cette proposition.

Proposition 17 (Propriétés de l'intégrale) *Notons $\mathcal{R}([a, b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$.*
Relation de Chasles. *Pour tout $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et tout $c \in [a, b]$ on a $f \in \mathcal{R}([a, c])$ et $f \in \mathcal{R}([c, b])$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Linéarité de l'intégrale. *Pour tous $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ et tous réels λ et μ on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}([a, b])$ et*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Croissance. *Pour tous $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Par conséquent, si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
Majoration. *Pour tout $f \in \mathcal{R}([a, b])$ on a $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ et*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz. *Pour tous $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ on a $fg \in \mathcal{R}([a, b])$ et*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Par conséquent $\mathcal{R}([a, b])$ est une algèbre réelle et $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est une application linéaire de $\mathcal{R}([a, b])$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice Démontrer cette proposition.

12.3 Classes de fonctions intégrables

Définition 31 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux, s'il exitse un subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$, telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et que f admette des limites à droite aux points de discontinuité $x_0, \cdots, x_{n-1}$ et des limites à gauche aux points de discontinuité $x_1, \cdots, x_n$.*

Théorème 27 *1. Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*
2. Si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.
3. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Exercice Démontrer ce théorème.

Proposition 18 *Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ sur } [a, b].$$

12.4 Somme de Riemann

Définition 32 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Soit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, une subdivision de $[a,b]$ et soit $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, une suite de points. On appelle somme de Riemann de f associée à cette subdivision et à ces points la somme*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

Théorème 28 *Si la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ alors*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

où $h = \max\{|x_{i+1} - x_i| : 0 \leq i \leq n-1\}$ est le pas de la subdivision.

Exercice Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

.

Table des matières