Mathématiques pour les licences de chimie et de physique

Tewfik Sari

L3 Chimie et Physique

Avertissement : ces notes sont la rédaction provisoire du cours de mathématiques pour les licences de chimie et de physique. Dans les deux premiers chapitres on montre comment utiliser l'analyse de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur et l'équation des ondes. Certains problèmes liés à ces deux équations conduisent à la résolution d'équations différentielles linéaires à coefficients non constants, dont les solutions ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires. Les solutions de ces équations sont appelées des *fonctions spéciales*. On en étudie un specimen, les fonctions de Bessel, dans le chapitre trois. Le dernier chapitre est consacré à une brève introduction au calcul des probabilités sur un ensemble fini.

Chapitre 1

Séries de Fourier

1.1 Séries de Fourier en *sinus*

1.1.1 Propagation de la chaleur dans une tige de longueur finie

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{array}\right. \tag{1.1}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans une tige de longueur finie l dont les extrémités sont maintenues à la température 0. Ici $u(x,t)$ désigne la température de la tige au point x à l'instant t. Les relations de compatibilité entre les conditions initiales $u(0,t) = u(l,t) = 0$ et la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ sont $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ et on cherche les solutions du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

qui se mettent sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. On obtient :

$$u_t = a^2 u_{xx} \Longleftrightarrow XT' = a^2 X''T \Longleftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$u(0,t) = 0 \Longleftrightarrow X(0) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \Longleftrightarrow X(l) = 0.$$

Par conséquent le problème (1.2) est équivalent aux deux problèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{ll} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0. & \end{array}\right. \tag{1.3}$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0, \quad t > 0 \tag{1.4}$$

où λ est un paramètre réel. Le problème (1.3) est appelé un problème de Sturm-Liouville : Il s'agit de trouver les valeurs de λ qui seront appelées les *valeurs propres* pour lesquelles le problème (1.3) admet des solution non triviales (c'est à dire non identiquement nulles), qui seront appelées les *fonctions propres*. On a le résultat suivant

Théorème 1 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (1.3) sont*

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad \textit{avec} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

Les solutions du problème (1.4) correspondant aux valeurs propres $\lambda = \lambda_k$ sont

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}, \qquad \text{avec} \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(x,t) = T(t)X(x)$ du problème (1.2) sont

$$u_k(x,t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad \text{avec} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots . \tag{1.5}$$

Principe de superposition

Comme le problème (1.2) est linéaire on a le résultat suivant

Proposition 1 *Si u_1 et u_2 sont des solutions du problème (1.2) alors leur somme $u_1 + u_2$ est aussi une solution de ce problème. Plus généralement si u_k, $k = 1, 2, \cdots$ sont des solutions alors la série*

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots$$

est une solution (pourvu qu'elle converge comme il faut).

Comme on connait les solutions (1.5) du problème (1.2), on en déduit que les séries

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \tag{1.6}$$

sont des solutions du problème (1.2). Une telle fonction vérifie aussi la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ si et seulement si on a

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Développements en séries de Fourier en *sinus*

Soit $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $x \in]0,l[$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{1.7}$$

avec

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{1.8}$$

Si la fonction φ est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors en un point de discontinuité x on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2},$$

où $\varphi(x+0)$ et $\varphi(x-0)$ désignent les limites à droite et à gauche de la fonction φ au point x. Les formules qui donnent les constantes A_k s'obtiennent immédiatement en utilisant les *relations d'orthogonalité* suivantes

$$\frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (1.7) par $\sin \frac{n\pi x}{l}$ puis d'intégrer entre 0 et l. En effet on a

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} A_n.$$

En conclusion on a le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 2 *La solution du problème (1.1) est donnée par (1.6) où les constantes A_k sont définies par les formules (1.8)*

1.1.2 Propagation des ondes dans une corde de longueur finie

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & 0 \leq x \leq l \end{array}\right. \tag{1.9}$$

qui modélise la propagation d'une onde dans corde de longueur finie l dont les extrémités sont maintenues immobiles. Ici $u(x,t)$ désigne l'écart par rapport à la position au repos de la corde au point x à l'instant t.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément les conditions initiales $u(x,0) = \varphi(x)$ et $u_t(x,0) = \psi(x)$ et on cherche les solutions du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{array}\right. \tag{1.10}$$

qui se mettent sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. On obtient :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \Longleftrightarrow XT'' = a^2 X'' T \Longleftrightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$u(0,t) = 0 \Longleftrightarrow X(0) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \Longleftrightarrow X(l) = 0.$$

Par conséquent le problème (1.10) est équivalent aux deux problèmes suivants

$$\left\{\begin{array}{ll} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0. & \end{array}\right. \tag{1.11}$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad t > 0 \tag{1.12}$$

où λ est un paramètre réel. On sait (Théorème 1) que les solutions du problème de Sturm Liouville (1.11) sont

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad \text{avec} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

Les solutions du problème (1.12) correspondant aux valeurs propres λ_k sont

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}, \qquad \text{avec} \qquad A_k, B_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(x,t) = T(t)X(x)$ du problème (1.10) sont

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots . \tag{1.13}$$

Principe de superposition

Comme le problème (1.10) est linéaire et que l'on dispose de ses solutions (1.13), les séries

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{1.14}$$

sont des solutions du problème (1.10). Une telle fonction vérifie aussi les conditions initiales $u(x,0) = \varphi(x)$ et $u_t(x,0) = \psi(x)$ si et seulement si on a

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi a}{l} B_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

En écrivant les développements en séries de Fourier des fonction φ et ψ on obtient

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \tag{1.15}$$

En conclusion on a le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 3 *La solution du problème (1.9) est donnée par (1.14) où les constantes A_k et B_k sont définies par les formules (1.15).*

1.1.3 Unicité des solutions des problèmes (1.1) et (1.9)

Unicité des solutions du problème (1.1)

Dans cette section nous allons montrer que le problème (1.1) n'a qu'une solution, de sorte que la solution obtenue dans la proposition 2 est bien l'unique solution de ce problème. Soient u_1 et u_2 des solutions du problème (1.1). Alors $u = u_1 - u_2$ est solution du problème

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Montrons que l'unique solution de ce problème est la solution nulle $u(x,t) \equiv 0$. Multiplions l'équation $u_t = a^2 u_{xx}$ par u on obtient

$$uu_t = a^2 uu_{xx}.$$

Une intégration par parties par rapport à x entre 0 et l nous donne

$$\int_0^l uu_t dx = a^2\int_0^l uu_{xx}dx = a^2[uu_x]_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l u_x^2 dx.$$

Des conditions aux limites $u(0,t) = u(l,t) = 0$ on déduit que $[uu_x]_{x=0}^{x=l} = 0$. Posons

$$G(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx$$

Comme $u(x,0) = 0$ on a $G(0) = 0$. De plus, pour tout $t \geq 0$, $G(t) \geq 0$ et

$$G'(t) = \int_0^l uu_t dx = -a^2\int_0^l u_x^2 dx \leq 0.$$

Par conséquent $G(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et donc $u(x,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in [0,l]$.

Unicité des solutions du problème (1.1)

Nous allons montrer que le problème (1.9) n'a qu'une solution, de sorte que la solution obtenue dans la proposition 3 est bien l'unique solution de ce problème. Soient u_1 et u_2 des solutions du problème (1.9). Alors $u = u_1 - u_2$ est solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

Montrons que l'unique solution de ce problème est la solution nulle $u(x,t) \equiv 0$. Considérons la fonction

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[u_t^2 + a^2 u_x^2\right] dx.$$

Une intégration par parties par rapport à x nous donne

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l \left[u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}\right] dx = \int_0^l u_t u_{tt} dx + a^2 [u_x u_t]_{x=0}^{x=l} - a^2 \int_0^l u_t u_{xx} dx \\ &= \int_0^l u_t [u_{tt} - a^2 u_{xx}] dx + a^2 [u_x u_t]_{x=0}^{x=l} = a^2 [u_x u_t]_{x=0}^{x=l} = 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient des conditions aux limites $u(0,t) = u(l,t) = 0$ qui impliquent $u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0$. Ainsi $E(t)$ reste constant pour tout $t \geq 0$. Or

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x,0) + a^2 u_x^2(x,0)\right] dx = 0,$$

car $u_t(x,0) = 0$ pour $x \in [0,l]$ et $u(x,0) = 0$ pour $x \in [0,l]$ implique $u_x(x,0) = 0$ pour $x \in [0,l]$. Par conséquent $E(t) = 0$ pour tout $t > 0$. On en déduit que pour tout $t > 0$ et tout $x \in [0,l]$ on a $u_t(x,t) = 0$, $u_x(x,t) = 0$, c'est à dire que $u(x,t)$ reste constante. Comme $u(x,0) = 0$ on a bien $u(x,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in [0,l]$.

1.2 Séries de Fourier

1.2.1 Séries de Fourier en *cosinus*

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{1.16}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans une tige de longueur finie l dont les extrémités sont isolées.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < l \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

qui se mettent sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. On obtient :

$$u_t = a^2 u_{xx} \Longleftrightarrow XT' = a^2 X'' T \Longleftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$u_x(0,t) = 0 \Longleftrightarrow X'(0) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0 \Longleftrightarrow X'(l) = 0,$$

Par conséquent le problème (1.17) est équivalent aux deux problèmes suivants

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0, \quad t > 0 \tag{1.19}$$

où λ est un paramètre réel. On ne peut pas appliquer le résultat du théorème 1 car les conditions aux limites du problème de Sturm Liouville (1.18) sont différentes des conditions aux limites du problème de Sturm Liouville (1.3). On a le résultat suivant

Théorème 2 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (1.18) sont*

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l}, \qquad \textit{avec} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Les solutions du problème (1.19) correspondant aux valeurs propres $\lambda = \lambda_k$ sont

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}, \qquad \text{avec} \qquad A_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(x,t) = T(t)X(x)$ du problème (1.17) sont

$$u_k(x,t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{k\pi x}{l}, \qquad \text{avec} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.20}$$

Principe de superposition

Comme le problème (1.17) est linéaire et que l'on connait ses solutions (1.20), les séries

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{1.21}$$

sont des solutions du problème (1.17). Une telle fonction vérifie aussi la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ si et seulement si on a

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Développements en séries de Fourier en *cosinus*

Soit $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $x \in]0,l[$, on a

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} \tag{1.22}$$

avec

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx, \qquad A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{1.23}$$

Si la fonction φ est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors en un point de discontinuité x on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}.$$

Les formules qui donnent les constantes A_k s'obtiennent immédiatement en utilisant les *relations d'orthogonalité* suivantes

$$\frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \neq 0. \end{cases}$$

Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (1.22) par $\cos\frac{n\pi x}{l}$ puis d'intégrer entre 0 et l. En effet pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx &= \int_0^l \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{l}{2}A_n. \end{aligned}$$

Et pour $n = 0$ on a

$$\int_0^l \varphi(x)dx = \int_0^l \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}dx = lA_0.$$

En conclusion on a le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 4 *La solution du problème (1.16) est donnée par (1.21) où les constantes A_k sont définies par les formules (1.23).*

1.2.2 Séries de Fourier

Coefficients de Fourier

Soit c_n une suite de nombres complexes. On note par $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt}$ la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt} = c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{\mathrm{i}nt} + c_{-n} e^{-\mathrm{i}nt}\right).$$

Comme on a

$$e^{\mathrm{i}nt} = \cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt), \qquad e^{-\mathrm{i}nt} = \cos(nt) - \mathrm{i}\sin(nt),$$

on peut écrire aussi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

avec

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ces dernières équations sont équivalentes à

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Proposition 5 *Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt}$ soit uniformément convergente. Soit $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}nt}$ sa somme. Alors on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}nt} dt.$$

En notation trigonométrique on a : si $f(t)$ est la somme d'une série uniformément convergente

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

alors on a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Pour la démonstration on pose

$$f(t)e^{\mathrm{i}mt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}(n-m)t}.$$

Comme la série converge uniformément on peut intégrer terme à terme. On obtient

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}mt}dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-m)t}dt = 2\pi c_m.$$

Définition 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-péridoique et continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

ou bien les nombres complexes

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La série de Fourier de la fonction f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

Exercices Démontrer les propriétés suivantes

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

2. Les a_n, b_n et c_n sont linéaires en f :

$$a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g), \quad b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g),$$

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g).$$

3. On peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π, par exemple par l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

4. Si f est paire alors $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = 0$.

5. Si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$.

Convergence de la série de Fourier

La série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt}$ d'une fonction f est-elle convergente ? Si oui, sa somme est-elle égale à la fonction f. La réponse est donnée par le théorème suivant

Théorème 3 [Théorème de Dirichlet]. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f est simplement convergente et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt} = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{si } f \text{ n'est pas est continue en } t \end{cases}$$

Si de plus f est continue alors la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt}$ est normalement, donc uniformément convergente et sa somme est égale à $f(t)$.

On a aussi le résultat suivant qui est vrai même si la fonction f est seulement continue par morceaux.

Théorème 4 [Formule de Parseval]. *Si f est continue par morceaux on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt.$$

Fonctions T-périodiques

Définition 2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-péridoique et continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi nt}{T}}dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

ou bien les nombres complexes

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La série de Fourier de la fonction f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}\frac{2\pi nt}{T}} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n(f)\cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n(f)\sin\frac{2\pi nt}{T}\right). \tag{1.24}$$

On démontre facilement que Si f est impaire alors

$$a_n(f) = 0 \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt. \tag{1.25}$$

Si f est paire alors

$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt, \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = 0. \tag{1.26}$$

Proposition 6 *Le théorème de Dirichlet est vrai. La formule de Parseval devient*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

Retour sur les séries de Fourier en *sinus* ou en *cosinus*

Soit $l > 0$ et soit $\varphi : [0, l] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On peut l'étendre en une fonction, notée encore $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est $2l$-périodique et impaire. En utilisant les formules (1.24) et (1.25), ainsi que la proposition 6 (théorème de Dirichlet), pour tout $t \in]0, l[$, on a

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\varphi)\sin\frac{n\pi t}{l}, \qquad \text{avec} \qquad b_n(\varphi) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt.$$

On retouve ainsi les formules (1.7) et (1.8).

On peut l'étendre aussi en une fonction, notée encore $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est $2l$-périodique et paire. D'après les formules (1.24) et (1.26), et en utilisant la proposition 6, pour tout $t \in]0, l[$, on a

$$\varphi(t) = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\varphi)\cos\frac{n\pi t}{l}, \qquad \text{avec} \qquad a_n(\varphi) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt.$$

On retouve ainsi les formules (1.22) et (1.23).

Chapitre 2

Transformée de Fourier

2.1 Définitions et propriétés

2.1.1 Motivations physiques

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans une tige de longueur infinie dont l'une des extrémités est maintenue à la température 0. Ici $u(x,t)$ désigne la température de la tige au point x à l'instant t.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ x > 0, \qquad |u(x,t)| < +\infty \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

qui se mettent sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. On obtient :

$$u_t = a^2 u_{xx} \Longleftrightarrow XT' = a^2 X''T \Longleftrightarrow \frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$u(0,t) = 0 \Longrightarrow X(0) = 0, \qquad |u(x,t)| < +\infty \Longrightarrow |X(x)| < +\infty.$$

Problème de Sturm-Liouville

La fonction $X(x)$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x > 0 \\ X(0) = 0 & |X(x)| < +\infty \end{cases} \tag{2.3}$$

où λ est un paramètre réel.

Théorème 5 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (2.3) sont*

$$\lambda = \xi^2, \qquad X_\xi(x) = A(\xi)\sin(\xi x), \qquad \textit{avec} \qquad \xi > 0 \textit{ et } A(\xi) \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation $T' + a^2\lambda T = 0$ correspondant aux valeurs propres $\lambda = \xi^2$ sont

$$T_\xi(t) = C(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}, \qquad \text{avec} \qquad C(\xi) \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(x,t) = T(t)X(x)$ du problème (2.2) sont

$$u_\xi(x,t) = B(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}\sin(\xi x), \qquad \text{avec} \qquad \xi > 0 \text{ et } B(\xi) \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Principe de superposition

Comme le problème (2.2) est linéaire et que l'on dispose des solutions (2.4) du problème (2.2), on en déduit que les inttégrales

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} B(\xi) e^{-a^2\xi^2 t} \sin(\xi x) d\xi \tag{2.5}$$

sont des solutions du problème (2.2). Une telle fonction vérifie aussi la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ si et seulement si on a

$$\varphi(x) = u(x,0) = \int_0^{+\infty} B(\xi) \sin(\xi x) d\xi.$$

Une telle écriture existe pour toute fonction φ (voir section suivante). La fonction $B(\xi)$ est la transformée de Fourier de φ (à un facteur multiplicatif près) et est donnée par

$$B(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \sin(\xi x) dx. \tag{2.6}$$

En conclusion on a le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 7 *La solution du problème (2.1) est donnée par (2.5) où la fonction $B(\xi)$ est définie par la formule (2.6)*

2.1.2 Définitions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

On définit la fonction

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}\xi x} dx.$$

Cette intégrale est uniformément convergente car $|f(x)e^{-\mathrm{i}\xi x}| = |f(x)|$. Elle définit donc une fonction dérivable $F(\xi)$ appelée la transformée de Fourier de $f(x)$ et que l'on note

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)] \text{ ou bien } F = \mathcal{F}[f].$$

On montre (admis sans démonstration) que l'on a

$$f = \mathcal{F}^{-1}[F] \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$$

Exemple. Soit $\alpha > 0$ alors

$$f(x) = e^{-\alpha x^2} \Longrightarrow F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}. \tag{2.7}$$

En effet, une dérivation sous le signe intégral, suivie par une intégration par parties, nous donne

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-\mathrm{i}\xi x} (-\mathrm{i}x) dx = -\frac{\xi}{2\alpha} F(\xi).$$

Donc

$$F(\xi) = F(0) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}},$$

avec

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

2.1.3 Propriétés

Fonctions paires et fonctions impaires

Si f est une fonction paire alors

$$F(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\cos(\xi x)dx \quad \text{et} \quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\xi)\cos(\xi x)d\xi.$$

Si f est une fonction impaire alors

$$F(\xi)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(x)\sin(\xi x)dx \quad \text{et} \quad f(x)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(\xi)\sin(\xi x)d\xi.$$

On retrouve la formule (2.6) de la manière suivante. Soit $\varphi:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable. On la complète en une fonction impaire, notée encore $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Notons par $B(\xi)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}[\varphi(x)]$. Alors

$$B(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\sin(\xi x)dx \quad \text{et} \quad \varphi(x)=\int_0^{+\infty}B(\xi)\sin(\xi x)d\xi.$$

Linéarité

Soient f et g des fonctions absolument intégrables. On a

$$\mathcal{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathcal{F}[f]+\beta\mathcal{F}[g]$$

Dérivation de f

Soit f une fonction absolument intégrable telle que $f(\pm\infty)=0$ alors

$$\mathcal{F}[f']=\mathrm{i}\xi\mathcal{F}[f]. \tag{2.8}$$

En effet, soit $F(\xi)=\mathcal{F}[f(x)]$. Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-\mathrm{i}\xi x}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f'(x)e^{-\mathrm{i}\xi x}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}+\frac{\mathrm{i}\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-\mathrm{i}\xi x}dx=\mathrm{i}\xi F(\xi).\end{aligned}$$

Produit de convolution

Soient f et g des fonctions absolument intégrables. On définit leur produit de convolution $f*g$ par

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du.$$

On a

$$\mathcal{F}[f*g]=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]. \tag{2.9}$$

En effet on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-\mathrm{i}\xi u}du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(v)e^{-\mathrm{i}\xi v}dv\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(v)e^{-\mathrm{i}\xi(u+v)}dudv\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)g(x-u)du\right]e^{-\mathrm{i}\xi x}dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}[f*g](\xi).\end{aligned}$$

Transaltions

Si $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$ alors

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-\mathrm{i}\xi a} F(\xi) \tag{2.10}$$

Exercice Si $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$. Montrer que pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

2.2 Applications

2.2.1 Equation de la chaleur

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{2.11}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans une tige de longueur infinie. Ici $u(x,t)$ désigne la température de la tige au point x à l'instant t. On pose

$$U(\xi,t) = \mathcal{F}[u(x,t)], \qquad \Phi(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)].$$

Comme on a

$$\mathcal{F}[u_t(x,t)] = \frac{dU}{dt}(\xi,t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\xi^2 U(\xi,t),$$

le problème (2.11) équivaut à

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + a^2\xi^2 U = 0, & t > 0 \\ U(\xi,0) = \Phi(\xi), \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$U(\xi,t) = \Phi(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}.$$

D'après la formule (2.7) on a

$$\mathcal{F}[g(x,t)] = e^{-a^2\xi^2 t}, \qquad \text{avec} \qquad g(x,t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

Ainsi $U(\xi,t)$ est le produit des deux transformées de Fourier $\Phi(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$ et $\mathcal{F}[g(x,t)]$. Par conséquent, d'après (2.9), $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(\xi,t)]$ est égale au produit de convolution

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi * g(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{2.12}$$

Exercice Montrer que pour tout réel ξ, la fonction

$$u(x,t,\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

est une solution de l'équation de la chaleur $u_t = a^2 u_{xx}$. La solution (2.12), que l'on peut écrire

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) u(x,t,\xi) d\xi$$

est obtenue par superposition de ces solutions $u(x,t,\xi)$. Pour montrer qu'elle vérifie la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ is suffit de faire le changement de variable

$$z = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}.$$

On obtient alors

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2az\sqrt{t}) e^{-z^2} dz \Longrightarrow u(x,0) = \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \varphi(x).$$

Proposition 8 *La solution du problème (2.11) est donnée, pour tot $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$ par*

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2az\sqrt{t}) e^{-z^2} dz.$$

2.2.2 Equation des ondes

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{2.13}$$

qui modélise la propagation des ondes dans une corde de longueur infinie. Ici $u(x,t)$ désigne l'écart par rapport à la position au repos de la corde au point x à l'instant t. On pose

$$U(\xi,t) = \mathcal{F}[u(x,t)], \qquad \Phi(\xi) = \mathcal{F}[\varphi(x)], \qquad \Psi(\xi) = \mathcal{F}[\psi(x)].$$

Comme on a

$$\mathcal{F}[u_{tt}(x,t)] = \frac{d^2U}{dt^2}(\xi,t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}[u_{xx}(x,t)] = -\xi^2 U(\xi,t),$$

le problème (2.13) équivaut à

$$\begin{cases} \frac{d^2U}{dt^2} + a^2\xi^2 U = 0, & t > 0 \\ U(\xi,0) = \Phi(\xi),\ \frac{dU}{dt}(\xi,0) = \Psi(\xi) \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$\begin{aligned} U(\xi,t) &= \Phi(\xi)\cos(a\xi t) + \frac{\Psi(\xi)}{a\xi}\sin(a\xi t). \\ &= \Phi(\xi)\frac{e^{\mathrm{i}a\xi t} + e^{-\mathrm{i}a\xi t}}{2} + \frac{\Psi(\xi)}{\mathrm{i}\xi}\frac{e^{\mathrm{i}a\xi t} - e^{-\mathrm{i}a\xi t}}{2a} \end{aligned}$$

D'après la formule (2.10) on a

$$\Phi(\xi)e^{\mathrm{i}a\xi t} = \mathcal{F}[\varphi(x+at)], \qquad \Phi(\xi)e^{-\mathrm{i}a\xi t} = \mathcal{F}[\varphi(x-at)].$$

D'après les formules (2.8) et (2.10) on a

$$\frac{\Psi(\xi)}{\mathrm{i}\xi}e^{\mathrm{i}a\xi t} = \mathcal{F}\left[\int_0^{x+at}\psi(s)ds\right], \qquad \frac{\Psi(\xi)}{\mathrm{i}\xi}e^{-\mathrm{i}a\xi t} = \mathcal{F}\left[\int_0^{x-at}\psi(s)ds\right].$$

Par conséquent on a

$$U(\xi,t) = \frac{\mathcal{F}[\varphi(x+at)] + \mathcal{F}[\varphi(x-at)]}{2} + \frac{\mathcal{F}\left[\int_0^{x+at}\psi(s)ds\right] + \mathcal{F}\left[\int_0^{x-at}\psi(s)ds\right]}{2a}.$$

Par linéalité de la transformée de Fourier, on en déduit que

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds. \tag{2.14}$$

Exercice Montrer que l'équation des ondes $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ est équivalente à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0, \qquad \text{avec} \qquad \xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

En déduire alors que la solution générale de l'équation des ondes s'écrit

$$u(x,t) = v(x+at) + w(x-at),$$

avec v et w des fonctions arbitraires. Retrouver alors la solution (2.14) en considérant les conditions initiales $u(x,0) = \phi(x)$ et $u_t(x,0) = \psi(x)$.

Proposition 9 *La solution du problème (2.13) est donnée par (2.14).*

Chapitre 3

Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont des solutions de l'équation différentielle, dite de Bessel :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{3.1}$$

où $\nu \geq 0$ est un paramètre réel. Notons tout de suite le

Lemme 1 *Une fonction $y(x)$ est solution de l'équation de Bessel (3.1) si et seulement si la fonction $z(x) = y(\lambda x)$ est solution de l'équation*

$$x^2z'' + xz' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)z = 0. \tag{3.2}$$

En effet on a $z'(x) = \lambda y'(\lambda x)$, $z''(x) = \lambda^2 y''(\lambda x)$ et donc

$$x^2z''(x) + xz'(x) + (\lambda^2x^2 - \nu^2)z(x) = (\lambda x)^2y''(\lambda x) + (\lambda x)y'(\lambda x) + ((\lambda x)^2 - \nu^2)y(\lambda x) = 0.$$

3.1 La fonction de Bessel J_0

3.1.1 Motivations

Nous allons montrer pourquoi l'équation (3.2) présente un intérêt pour les applications. L'équation des ondes s'écrit

$$u_{tt} = a^2\Delta u$$

où Δu est le Laplacien de la fonction u. En dimension 2 on a, en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.$$

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), & t > 0,\ r < r_0 \\ u(r_0,t) = 0,\ |u(0,t)| < +\infty & t \geq 0 \\ u(r,0) = f(r),\ u_t(r,0) = 0, & r \leq r_0 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

qui modélise les vibrations ayant une symétrie circulaire (c'est à dire ne dépendant pas de l'angle φ) d'une membrane circulaire de rayon r_0, fixée sur son bord. Ici $u(r,t)$ désigne l'écart par rapport à la position au repos de la membrane en un point à distance r de l'origine et à l'instant t. La condition $u_t(r,0) = 0$ signifie que la membrane est déplacée initialement en $f(r)$ puis qu'elle est relachée, sans lui imprimer de vitesse initiale. Noter que la condition $|u(0,t)| < +\infty$ est précisée car l'équation aux dérivées partielles n'est pas définie pour $r = 0$ et ses solutions peuvent exploser en l'infini lorsque r tend vers 0.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément les conditions initiales $u(r,0) = f(r)$, $u_t(r,0) = 0$ et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), & t > 0,\ r < r_0 \\ u(r_0,t) = 0,\ |u(0,t)| < +\infty & t \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

qui se mettent sous la forme $u(r,t) = R(r)T(t)$. On obtient :

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) \Longleftrightarrow RT'' = a^2\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right) \Longleftrightarrow \frac{T''}{a^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda \in \mathbb{R}.$$

$$u(r_0,t) = 0 \Longrightarrow R(r_0) = 0, \qquad |u(0,t)| < +\infty \Longrightarrow |R(0)| < +\infty.$$

Problème de Sturm-Liouville

Par conséquent la fonction $R(r)$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, & 0 < r < r_0 \\ R(r_0) = 0,\ |R(0)| < +\infty \end{cases} \tag{3.5}$$

où λ est un paramètre réel. On retrouve le cas particulier de l'équation (3.2) obtenu en posant $\nu = 0$. Nous allons commencer par l'étude de l'équation

$$xy'' + y' + xy = 0, \tag{3.6}$$

obtenue en en posant $\nu = 0$ dans l'équation (3.1).

3.1.2 Solutions développables en séries entières de l'équation (3.6)

On cherche les solutions de l'équation (3.6) qui se mettent sous la forme

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k. \tag{3.7}$$

Les coefficients a_k sont déterminés par identification, en dérivant (3.7) et en remplaçant dans (3.6). On a

$$y' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

En portant ces expressions dans (3.6) on obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} [k(k-1) + k]\, a_k x^{k-1} + a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0.$$

Ce qui donne alors

$$a_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[k^2 a_k + a_{k-2}\right] x^{k-1} = 0.$$

Cette série n'est identiquement nulle que si tous les coefficients s'annulent. On a alors

$$a_1 = 0$$

$$k^2 a_k + a_{k-2} = 0, \qquad k \geq 2.$$

La deuxième équation nous donne

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2}, \qquad \text{pour tout } k \geq 2.$$

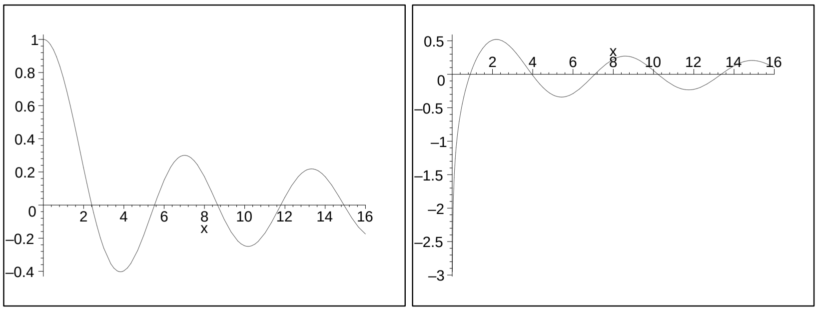

FIG. 3.1 – Les fonctions de Bessel $J_0(x)$ (à gauche) et de Neumann $N_0(x)$ (à droite)

n	1	2	3	4	5	6
μ_n	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711

TAB. 3.1 – Les premiers zéros de la fonction de Bessel $J_0(x)$

Par conséquent

$$a_1 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_5 = 0, \qquad a_{2m+1} = 0.$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 4^2}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^2 4^2 6^2}, \qquad a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}(m!)^2}.$$

On obtient ainsi la solution $y(x) = J_0(x)$ et appelée la fonction de Bessel J_0, définie par

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \tag{3.8}$$

Le rayon de convergence de cette série est infinie (montrer le). La solution J_0 de l'équation de Bessel (3.6) est définie sur tout $\mathbb{R}$. La fonction de Bessel J_0 est représentée sur la figure 3.1 (à gauche). On démontre que l'équation de Bessel (3.6) possède une deuxième solution, appelée la fonction de Neumann N_0 et qui tend vers l'infini quand x tend vers 0 (voir figure 3.1 à droite). Comme l'équation (3.6) est linéaire, la solution générale s'écrit

$$y(x) = AJ_0(x) + BN_0(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Retour sur le problème de Sturm-Liouville (3.5)

D'après le Lemme 1, la solution $R(r)$ du problème (3.5) s'écrit

$$R(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda} r) + BN_0(\sqrt{\lambda} r), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Comme la solution est réelle et pas complexe, on doit prendre $\lambda > 0$. La condition $|R(0)| < +\infty$ implique $B = 0$. La condition $R(r_0) = 0$ nous donne

$$J_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0.$$

Ainsi $\sqrt{\lambda} r_0$ est une racine de la fonction de Bessel J_0. La fonction de Bessel J_0 possède une infinité de zéros

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n < \cdots$$

La table 3.1 donne la liste des premiers zéros positifs de J_0. Par conséquent on a

Théorème 6 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (3.5) sont*

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2, \qquad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r\right), \qquad \textit{avec} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

Equation en T

Maintenant on consière l'équation

$$T'' + \lambda_k a^2 T = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\mu_k t}{r_0} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{r_0}, \qquad \text{avec} \qquad A_k, B_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(r,t) = R(r)T(t)$ du problème (3.4) sont

$$u_k(r,t) = \left(A_k \cos \frac{a\mu_k t}{r_0} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{r_0} \right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r \right), \qquad k = 1, 2, 3, \cdots . \tag{3.9}$$

Principe de superposition

Comme le problème (3.4) est linéaire et que l'on dispose de ses solutions (3.9), les séries

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos \frac{a\mu_k t}{r_0} + B_k \sin \frac{a\mu_k t}{r_0} \right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r \right) \tag{3.10}$$

sont des solutions du problème (3.4). Une telle fonction vérifie aussi les conditions initiales $u(r,0) = f(r)$ et $u_t(r,0) = 0$ si et seulement si on a

$$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r \right).$$

$$0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a\mu_k}{r_0} B_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0} r \right) \Longrightarrow B_k = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots .$$

Donc on doit développer la condition initiale $f(r)$ en série suivant les fonctions de Bessel, comme on l'avait fait pour les séries de Fourier. On a besoin pour cela de relations d'orthogonalité.

Lemme 2 (Relations d'orthogonalité) *Pour tout $n \neq k$ on a*

$$\int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_k x) dx = 0 \tag{3.11}$$

En effet, comme la fonction J_0 est une solution de l'équation de Bessel (3.6) on sait, voir Lemme 1, que la fonction $y(x) = J_0(\mu x)$ est solution de l'équation

$$xy'' + y' + \mu^2 xy = 0$$

Notons $y_1(x) = J_0(\mu_n x)$ et $y_2(x) = J_0(\mu_k x)$. On a

$$xy_1'' + y_1' + \mu_n^2 x y_1 = 0, \qquad xy_2'' + y_2' + \mu_k^2 x y_2 = 0.$$

En multipliant la première équation par y_2 et la deuxième équation par y_1 et en soustrayant on obtient :

$$x(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + y_1' y_2 - y_1 y_2' + (\mu_n^2 - \mu_k^2) x y_1 y_2 = 0.$$

Par consequent on a

$$\frac{d}{dx}[x(y_1' y_2 - y_1 y_2')] = (\mu_k^2 - \mu_n^2) x y_1 y_2.$$

Intégrons entre 0 et 1. On trouve

$$\left[x(y_1' y_2 - y_1 y_2') \right]_{x=0}^{x=1} = (\mu_k^2 - \mu_n^2) \int_0^1 x y_1(x) y_2(x) dx.$$

D'où

$$0 = \mu_n J_0'(\mu_n) J_0(\mu_k) - \mu_k J_0'(\mu_k) J_0(\mu_n) = (\mu_k^2 - \mu_n^2) \int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_k x) dx$$

car $J_0(\mu_n) = J_0(\mu_k) = 0$.

3.1.3 Développements en séries de fontions de Bessel

Des relations d'orthogonalité (3.11) on déduit que

$$\int_0^{r_0} rJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr = 0. \tag{3.12}$$

Soit $f : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $r \in]0, r_0[$, on a

$$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right), \tag{3.13}$$

avec

$$A_k = \frac{\int_0^{r_0} rf(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr}{\int_0^{r_0} rJ_0^2\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{3.14}$$

Si la fonction f est seulement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors en un point de discontinuité r on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) = \frac{f(r+0) + f(r-0)}{2},$$

où $f(r+0)$ et $f(r-0)$ désignent les limites à droite et à gauche de la fonction f au point f. Les formules (3.14) qui donnent les constantes A_k s'obtiennent immédiatement en utilisant les relations d'orthogonalité (3.12). Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (3.13) par $rJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right)$ puis d'intégrer entre 0 et r_0. En effet on a

$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} rf(r)J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr &= \int_0^{r_0}\sum_{k=1}^{+\infty} A_k rJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_0^{r_0} rJ_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right) dr = A_n \int_0^{r_0} rJ_0^2\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) dr.\end{aligned}$$

En conclusion on a le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 10 *La solution du problème (3.3) est donnée par*

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\frac{a\mu_k t}{r_0} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)$$

où les constantes A_k et B_k sont définies par les formules (3.14).

3.2 Fonctions de Bessel J_ν

3.2.1 Méthode de Frobenius de résolution de l'équation (3.1)

On cherche les solutions de l'équation (3.1) qui se mettent sous la forme

$$y(x) = x^\sigma \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k, \qquad a_0 \neq 0. \tag{3.15}$$

L'exposant σ, ainsi que les coefficients a_k sont déterminés, par identification en dérivant (3.15) et en remplaçant dans (3.1). On a

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+\sigma}, \qquad y' = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\sigma)a_k x^{k+\sigma-1}, \qquad y'' = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+\sigma)(k+\sigma-1)a_k x^{k+\sigma-2}.$$

En portant ces expressions dans (3.1) on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(k+\sigma)(k+\sigma-1)+(k+\sigma)-\nu^2\right]a_k x^{k+\sigma}+\sum_{k=0}^{+\infty}a_k x^{k+\sigma+2}=0.$$

Ce qui donne alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left[(k+\sigma)^2-\nu^2\right]a_k x^{k+\sigma}+\sum_{k=2}^{+\infty}a_{k-2}x^{k+\sigma}=0.$$

Cette série n'est identiquement nulle que si tous les coefficients s'annulent. On a alors

$$(\sigma^2-\nu^2)a_0=0$$

$$\left[(\sigma+1)^2-\nu^2\right]a_1=0$$

$$\left[(k+\sigma)^2-\nu^2\right]a_k+a_{k-2}=0, \qquad k\geq 2.$$

Comme $a_0\neq 0$, la première équation, appelée *équation indiciaire*, nous donne $\sigma=\pm\nu$. De la deuxième équation on déduit alors que $a_1=0$. Considérons le cas $\sigma=\nu\geq 0$. La troisième équation nous donne

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{(\nu+k)^2-\nu^2}=-\frac{a_{k-2}}{2k(k+2\nu)}, \qquad \text{pour tout } k\geq 2.$$

Par conséquent

$$a_{2m+1}=0, \qquad a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}, \qquad m=1,2,\cdots.$$

On obtient ainsi la solution

$$y_\nu(x)=a_0x^\nu\left[1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}\right]. \tag{3.16}$$

Considérons maintenant le cas $\sigma=-\nu$. On obtient la solution (définie seulement si ν n'est pas entier)

$$y_{-\nu}(x)=a_0x^{-\nu}\left[1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+m)}\right]. \tag{3.17}$$

3.2.2 Expression des fonctions de Bessel avec la fonction Γ d'Euler

On considère la fonction

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

Cette intégrale est convergente pour tout $x>0$. Elle diverge pour $x=0$. En intégrant par parties on obtient

$$\Gamma(x)=\left[\frac{t^x e^{-t}}{x}\right]_{t=0}^{t=+\infty}+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

On obtient donc

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{3.18}$$

Cette formule permet d'étendre la fonction Γ aux $x<0$. En effet, pour $x\in]-1,0[$ elle permet de définir $\Gamma(x)$, car $x+1\in]0,1[$. On constate que $\Gamma(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 ou vers -1. Ensuite, pour $x\in]-2,-1[$ elle permet de définir $\Gamma(x)$, car $x+1\in]-1,0[$. On constate que $\Gamma(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers -1 ou vers -2. Et ainsi de suite... On obtient une fonction définie en dehors des entiers négatifs ou nuls et dont le graphe est représenté sur le figure 3.2. Comme $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$, de la relation (3.18) on

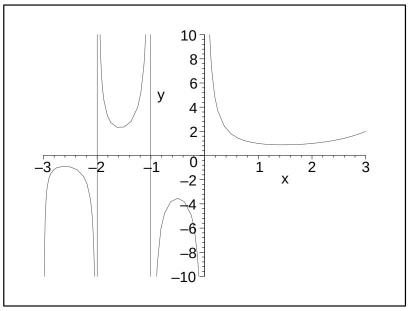

FIG. 3.2 – La fonction $\Gamma(x)$

déduit que

$$\Gamma(n+1) = n!, \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \cdots$$

On a aussi

$$\Gamma(x+m+1) = (x+1)(x+2)\cdots(x+m)\Gamma(x+1), \qquad \text{pour tout entier } m \text{ et tout réel } x.$$

En choisissant $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ dans les solutions (3.16) et (3.17) on obtient les solutions particulières de l'équation de Bessel (3.1) notées par

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}. \tag{3.19}$$

Considérons maintenant le cas $\sigma = -\nu$. On obtient la solution

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}. \tag{3.20}$$

Comme l'équation (3.1) est linéaire, la solution générale s'écrit, dans le cas où ν n'est pas entier

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas où $\mu = n \geq 0$ est un entier positif ou nul, la solution $J_{-n}(x)$ n'est pas linéairement indépendante de la solution $J_n(x)$ car on a $J_{-n}(x) = J_n(-x)$ pour tout x. On montre l'existence d'une autre solution, appelée fonction de Neumann et notée $N_n(x)$. La fonction $N_n(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 0. Par linéarité la solution générale de l'équation

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

s'écrit

$$y(x) = AJ_n(x) + BN_n(x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le lemme 1 on en déduit :

Proposition 11 *La solution générale de l'équation*

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$$

s'écrit

$$y(x) = AJ_n(\lambda x) + BN_n(\lambda x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Relations d'orthogonalité

La fonction de Bessel admet une infinité de racines

$$0 < \mu_{\nu 1} < \mu_{\nu 2} < \cdots < \mu_{\nu k} < \cdots$$

Soient $\mu_{\nu n}$ et $\mu_{\nu k}$ des racines distinctes de l'équation $J_\nu(x) = 0$. Alors

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_{\nu n} x) J_\nu(\mu_{\nu k} x) dx = 0$$

En effet, comme la fonction J_ν est une solution de l'équation de Bessel (3.1) on sait, voir Lemme 1, que la fonction $y(x) = J_0(\lambda x)$ est solution de l'équation (3.2). Notons $y_1(x) = J_\nu(\mu_{\nu n} x)$ et $y_2(x) = J_\nu(\mu_{\nu k} x)$. On a

$$xy_1'' + y_1' + \left(\mu_{\nu n}^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y_1 = 0, \qquad xy_2'' + y_2' + \left(\mu_{\nu k}^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) y_2 = 0.$$

En multipliant la première équation par y_2 et la deuxième équation par y_1 et en soustrayant on obtient :

$$x(y_1'' y_2 - y_1 y_2'') + y_1' y_2 - y_1 y_2' + (\mu_{\nu n}^2 - \mu_{\nu k}^2) x y_1 y_2 = 0.$$

Par consequent on a

$$\frac{d}{dx}[x(y_1' y_2 - y_1 y_2')] = (\mu_{\nu k}^2 - \mu_{\nu n}^2) x y_1 y_2.$$

Intégrons entre 0 et 1. On trouve

$$\left[x(y_1' y_2 - y_1 y_2')\right]_{x=0}^{x=1} = (\mu_{\nu k}^2 - \mu_{\nu n}^2) \int_0^1 x y_1(x) y_2(x) dx$$

D'où

$$0 = \mu_1 J_\nu'(\mu_{\nu n}) J_\nu(\mu_{\nu k}) - \mu_2 J_\nu'(\mu_{\nu k}) J_\nu(\mu_{\nu n}) = (\mu_{\nu k}^2 - \mu_{\nu n}^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_{\nu n} x) J_\nu(\mu_{\nu k} x) dx$$

car $J_\nu(\mu_{\nu n}) = J_\nu(\mu_{\nu n}) = 0$.

Développements en séries de fonctions de Bessel

En utilisant les relations d'orthogonalité établies précédemment, on peut développer toute fonction $f(r)$ définie sur $[0, r_0]$ en séries de fonctions de Bessel $J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{r_0} r\right)$ où les $\mu_{\nu k}$ sont les zéros de la fonction de Bessel J_ν. On a

$$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{r_0} r\right), \qquad \text{avec} \qquad A_k = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{r_0} r\right) dr}{\int_0^{r_0} r J_\nu^2\left(\frac{\mu_{\nu k}}{r_0} r\right) dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{3.21}$$

3.3 Applications

3.3.1 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit

$$u_t = a^2 \Delta u$$

où Δu est le Laplacien de la fonction u. En dimension 3 on a en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}\right), & t > 0,\ r < r_0,\ 0 < z < z_0 \\ u(r_0, z, t) = 0, & t \geq 0,\ 0 < z < z_0 \\ u(r, 0, t) = u(r, z_0, t) = 0 & t \geq 0,\ \ r < r_0 \\ |u(0, z, t)| < +\infty & t \geq 0,\ 0 < z < z_0 \\ u(r, z, 0) = f(r, z), & r \leq r_0,\ 0 < z < z_0 \end{cases} \tag{3.22}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans un cylindre de rayon r_0 et de hauteur z_0, dont la surface extérieure est maintenue à la température 0. Comme la condition initiale ne dépend pas de la variable angulaire φ, la solution n'en dépendra pas pour $t > 0$. C'est la raison pour laquelle le terme en $u_{\varphi\varphi}$ du Laplacien n'est pas pris en considération. Ici $u(r, z, t)$ désigne la température en un point de coordonnées (r, z) et à l'instant t.

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément les conditions initiales $u(r, z, 0) = f(r, z)$ et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz}\right), & t > 0,\ r < r_0,\ 0 < z < z_0, \\ u(r_0, z, t) = 0,\ |u(0, z, t)| < +\infty & t \geq 0,\ 0 < z < z_0, \\ u(r, 0, t) = u(r, z_0, t) = 0 & t \geq 0,\ r < r_0. \end{cases} \tag{3.23}$$

qui se mettent sous la forme $u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$. On obtient :

$$RZT' = a^2\left(R''ZT + \frac{1}{r}R'ZT + RZ''T\right) \Leftrightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{Z''}{Z} = -\alpha \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent on a

$$T' + \alpha a^2 T = 0 \tag{3.24}$$

et

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \alpha = -\frac{Z''}{Z} = \beta \in \mathbb{R}$$

Cette dernière équation équivaut à

$$Z'' + \beta Z = 0 \qquad \text{et} \qquad R'' + \frac{1}{r}R' + (\alpha - \beta)R = 0.$$

Problèmes de Sturm-Liouville

On a

$$u(r_0, z, t) = 0 \Longrightarrow R(r_0) = 0, \qquad |u(0, z, t)| < +\infty \Longrightarrow |R(0)| < +\infty.$$

$$u(r, 0, t) = u(r, z_0, t) = 0 \Longrightarrow Z(0) = Z(z_0) = 0.$$

On en déduit deux problèmes de Sturm-Liouville. Le premier concerne la fonction Z.

$$\begin{cases} Z'' + \beta Z = 0, \\ Z(0) = Z(z_0) = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

D'après le théorème 1 les solutions du problème de Sturm Liouville (3.25) sont

$$\beta_n = \left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2, \qquad Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{z_0}, \qquad \text{avec} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Le deuxième problème de Sturm Liouville concerne la fonction R. On le résoud pour les valeurs $\beta_n = \left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2$. On a :

$$\begin{cases} rR'' + R' + \lambda rR = 0, & 0 < r < r_0 \\ R(r_0) = 0,\ |R(0)| < +\infty \end{cases} \tag{3.26}$$

avec $\lambda = \alpha - \beta_n$. D'après le théorème 6 les solutions du problème de Sturm Liouville (3.34) sont

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2, \qquad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right), \qquad \text{avec} \qquad k = 1, 2, 3, \cdots .$$

Par conséquent on a

$$\alpha = \alpha_{nk} = \beta_n + \lambda_k = \left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2 + \left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2$$

Equation en T

Maintenant on consière l'équation (3.32) avec $\alpha = \alpha_{nk}$:

$$T' + \alpha_{nk}a^2T = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$T_{nk}(t) = A_{nk}e^{-a^2\alpha_{nk}t}, \qquad \text{avec} \qquad A_{nk} \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$ du problème (3.23) sont

$$u_{nk}(r, z, t) = A_{nk}e^{-a^2\left(\left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2+\left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2\right)t} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)\sin\frac{n\pi z}{z_0}, \quad n, k = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.27}$$

Principe de superposition

Comme le problème (3.23) est linéaire et que l'on dispose de ses solutions (3.27), les séries

$$u(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}e^{-a^2\left(\left(\frac{n\pi}{z_0}\right)^2+\left(\frac{\mu_k}{r_0}\right)^2\right)t} J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)\sin\frac{n\pi z}{z_0}, \tag{3.28}$$

sont des solutions du problème (3.23). Une telle fonction vérifie aussi la condition initiale $u(r, z, 0) = f(r, z)$ si et seulement si on a

$$f(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)\sin\frac{n\pi z}{z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r)\sin\frac{n\pi z}{z_0} \tag{3.29}$$

avec

$$A_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)$$

Ces expressions sont des développement en séries de fonctions de Bessel des fonction $A_n(r)$. D'après les formules (3.13) et (3.14), on a :

$$A_{nk} = \frac{\int_0^{r_0} rA_n(r)J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0} rJ_0^2\left(\frac{\mu_{0k}}{r_0}r\right)dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

Par ailleurs, la formule (3.29) est un développement en série de Fourier en *sinus* de la fonction $f(r, z)$ par rapport à la variable z. D'après les formules (1.7) et (1.8) on a

$$A_n(r) = \frac{2}{z_0}\int_0^{z_0} f(r, z)\sin\frac{n\pi z}{z_0}dz, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Par conséquent on a démontré le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 12 *La solution du problème (3.22) est donnée par la formule (3.28) où les constantes A_{nk} sont définies par les formules*

$$A_{nk} = \frac{\frac{2}{z_0}\int_0^{r_0}\int_0^{z_0} rf(r, z)\sin\frac{n\pi z}{z_0}J_0\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)drdz}{\int_0^{r_0} rJ_0^2\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right)dr}, \qquad n, k = 1, 2, \cdots$$

3.3.2 Equation des ondes

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right), & t>0,\ r<r_0,\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ u(r_0,\varphi,t)=0,\ |u(0,\varphi,t)|<+\infty & t\ge 0,\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi),\ u_t(r,\varphi,0)=0, & r\le r_0,\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right. \tag{3.30}$$

qui modélise les vibrations d'une membrane circulaire de rayon r_0, fixée sur son bord. Ici $u(r,\varphi,t)$ désigne l'écart par rapport à la position au repos de la membrane en un point de coordonnées (r,φ) et à l'instant t. La condition $u_t(r,\varphi,0)=0$ signifie que la membrane est déplacée initialement en $f(r,\varphi)$ puis qu'elle est relachée, sans lui imprimer de vitesse initiale. Comme la condition initiale dépend aussi de la variable angulaire, le terme $u\varphi\varphi$ du laplacien doit être pris en considération (comparer avec le problème (3.3)).

Méthode de séparation des variables

On oublie momentanément les conditions initiales $u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi)$, $u_t(r,\varphi,0)=0$ et on cherche les solutions du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right), & t>0,\ r<r_0,\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ u(r_0,\varphi,t)=0,\ |u(0,\varphi,t)|<+\infty & t\ge 0,\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right. \tag{3.31}$$

qui se mettent sous la forme $u(r,\varphi,t)=R(r)\Phi(\varphi)T(t)$ avec Φ une fonction 2π-périodique. On obtient :

$$R\Phi T''=a^2\left(R''\Phi T+\frac{1}{r}R'\Phi T+\frac{1}{r^2}R\Phi''T\right)$$

qui équivaut à

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\alpha\in\mathbb{R}.$$

Par conséquent on a

$$T''+\alpha a^2T=0 \tag{3.32}$$

et

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}+\alpha r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\beta\in\mathbb{R}$$

Cette dernière équation équivaut à

$$\Phi''+\beta\Phi=0 \qquad \text{et} \qquad r^2R''+rR'+(\alpha r^2-\beta)R=0.$$

Problèmes de Sturm-Liouville

On a

$$u(r_0,\varphi,t)=0\Longrightarrow R(r_0)=0, \qquad |u(0,\varphi,t)|<+\infty\Longrightarrow|R(0)|<+\infty.$$

On en déduit deux problèmes de Sturm-Liouville. Le premier concerne la fonction Φ.

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''+\beta\Phi=0, \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi) \end{array}\right. \tag{3.33}$$

Théorème 7 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (3.33) sont*

$$\beta_n=n^2, \qquad \Phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi), \qquad \textit{avec} \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

Le deuxième problème de Sturm Liouville concerne la fonction R. On le résoud pour les valeurs $\beta_n = n^2$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\alpha r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 < r < r_0 \\ R(r_0) = 0, \ |R(0)| < +\infty \end{cases} \tag{3.34}$$

D'après la proposition 11 la solution générale de cette équation s'écrit

$$R(r) = C_n J_n(\sqrt{\alpha} r) + D_n N_n(\sqrt{\alpha} r) \qquad \text{avec } C_n, D_n \in \mathbb{R}.$$

Comme $|R(0)| < +\infty$ on a $D_n = 0$. Comme $R(r_0) = 0$ on a $\sqrt{\alpha} r_0 = \mu_{nk}$ avec

$$0 < \mu_{n1} < \mu_{n2} < \cdots < \mu_{nk} < \cdots$$

sont les zéros de la fonction de Bessel J_n. Ainsi

Théorème 8 *Les solutions du problème de Sturm Liouville (3.34) sont*

$$\alpha_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}\right)^2, \quad R_{nk}(r) = J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right), \quad \textit{avec} \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ k = 1, 2, 3, \cdots$$

Equation en T

Maintenant on consière l'équation (3.32) avec $\alpha = \alpha_{nk}$:

$$T'' + \alpha_{nk} a^2 T = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$T_{nk}(t) = C_{nk} \cos \frac{a\mu_{nk} t}{r_0} + D_{nk} \sin \frac{a\mu_{nk} t}{r_0}, \qquad \text{avec} \qquad C_{nk}, D_{nk} \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, les solutions de la forme $u(r, \varphi, t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$ du problème (3.31) sont

$$u_{nk}(r, \varphi, t) = J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right) (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \left(C_{nk} \cos \frac{a\mu_{nk} t}{r_0} + D_{nk} \sin \frac{a\mu_{nk} t}{r_0}\right) \tag{3.35}$$

avec $n = 0$, 1, 2, ... et $k = 1$, 2, 3, ...

Principe de superposition

Comme le problème (3.31) est linéaire et que l'on dispose de ses solutions (3.35), les séries

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right) (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \left(C_{nk} \cos \frac{a\mu_{nk} t}{r_0} + D_{nk} \sin \frac{a\mu_{nk} t}{r_0}\right) \tag{3.36}$$

sont des solutions du problème (3.31). Une telle fonction vérifie aussi les conditions initiales $u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$ et $u_t(r, \varphi, 0) = 0$ si et seulement si on a

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right) (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) C_{nk}.$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right) (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \frac{a\mu_{nk}}{r_0} D_{nk} \Longrightarrow D_{nk} = 0.$$

Par conséquent la solution s'écrit

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0} r\right) (A_{nk} \cos(n\varphi) + B_{nk} \sin(n\varphi)) \cos \frac{a\mu_{nk} t}{r_0} \tag{3.37}$$

où on a noté $A_{nk} = A_n C_{nk}$ et $B_{nk} = B_n C_{nk}$. Donc on doit développer la condition initiale $f(r,\varphi)$ en série double suivant suivant les fonctions de Bessel et les fonction *sinus*. On a :

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)\left(A_{nk}\cos(n\varphi) + B_{nk}\sin(n\varphi)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n(r)\cos(n\varphi) + B_n(r)\sin(n\varphi)\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

avec

$$A_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right), \qquad B_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk} J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right).$$

Comme ces expressions sont des développement en séries de fonctions de Bessel des fonctions $A_n(r)$ et $B_n(r)$. D'après les formules (3.21), on a :

$$A_{nk} = \frac{\int_0^{r_0} rA_n(r)J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

et

$$B_{nk} = \frac{\int_0^{r_0} rB_n(r)J_n^2\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}{\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Par ailleurs la formule (3.38) est un développement en série de Fourier de la fonction $f(r,\varphi)$ par rapport à la variable φ. D'après la proposition 5 on a

$$A_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)d\varphi, \qquad A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$B_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Par conséquent on a démontré le résultat suivant (à ne pas apprendre par coeur !)

Proposition 13 *La solution du problème (3.30) est donnée par (3.37) où les constantes A_{nk} et B_{nk} sont définies par les formules*

$$A_{0k} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)J_0\left(\frac{\mu_{0k}}{r_0}r\right)drd\varphi}{\int_0^{r_0} rJ_0^2\left(\frac{\mu_{0k}}{r_0}r\right)dr}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

$$A_{nk} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)\cos(n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)drd\varphi}{\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}, \qquad n,k = 1, 2, \cdots.$$

$$B_{nk} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)\sin(n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)drd\varphi}{\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)dr}, \qquad n,k = 1, 2, \cdots.$$

Ce résultat est la généralisation du résultat obtenu dans la proposition 10, lorsqu'on avait supposé que la condition initiale ne dépendait que du rayon r et pas de l'angle φ.

Chapitre 4

Probabilités

4.1 Le langage du calcul des probabilités

4.1.1 Equiprobabilité, épreuves, événements

Le but du Calcul des Probabiltés est de modéliser et étudier un phénomène dont le résultat dépend du *hasard*. Par exemple si on lance un dé numéroté de 1 à 6 et si le dé n'est pas pipé, la *probabilité* d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{6}$. De même, si on tire, à la roulette, un numéro compris entre 1 et 36, et si la roulette n'est pas truquée, la *probabilité* d'obtenir un 11 est égale à $\frac{1}{36}$.

Dans ce chapitre tous les mots faisant partie du langage des probabilités que nous allons définir seront écrits en carractère gras (lorsqu'on les rencontre pour la première fois). On appelle **épreuve** l'un des résultats possible. L'ensemble de toutes les épreuves est appelé l'**espace des épreuves** ou l'**univers**. On le notera Ω. Dans le premier exemple (lancé du dé) on a

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Dans le deuxième exemple (tirage de la roulette) on a

$$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 34, 35, 36\}.$$

On ne considère que des phénomènes pour lesquels Ω est fini.

Toutes les épreuves Ω sont supposées *équiprobables*. Un **événement** est une partie de Ω. Soit A un événement, on appelle **cardinal** de A et on note $\mathrm{Card}A$ le nombre d'éléments de l'ensemble A. Par définition, la **probabilté** d'un événement A est le nombre réel

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}A}{\mathrm{Card}\Omega}. \tag{4.1}$$

Dans le premier exemple (lancé du dé), l'événement A “on a obtenu un nombre paire” est

$$A = \{2, 4, 6\},$$

sa probabilité est $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dans le deuxième exemple (tirage de la roulette), l'événement B “on a tiré un nombre premier” est

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\},$$

sa probabilité est $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

La proposition suivante est immédiate

Proposition 14 *La probabilité définie par la formule (4.1) est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, définie sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $P(\Omega) = 1$

2. Pour tous événements A et B si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On déduit de cette proposition que la probabilité vérifie aussi les propriétés suivantes

$$P(A^c) = 1 - P(A), \qquad P(\emptyset) = 0,$$

où $A^c = \Omega \setminus A$ est le complémentaire de l'événement A et

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j \quad \text{pour tous} \quad i \neq j.$$

4.1.2 Probabilités avec poids

Dans les livres on trouve la définition plus générale suivante d'une probabilité : on appelle probabilité sur un ensemble fini Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant les propriétés 1 et 2 de la proposition 14. Cette définition englobe le cas où toutes les épreuves ne sont pas nécéssairement équiprobables ; on donne un poids p_ω à chaque épreuve ω de l'espace Ω, vérifiant $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. La formule (4.1) définissant la probabilté doit être remplacée par

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega. \tag{4.2}$$

S'il y a équiprobabilité, alors $p_\omega = \frac{1}{\mathrm{Card}\Omega}$ pour chaque épreuve $\omega \in \Omega$ et on retrouve la formule (4.1). La probabilité définie par la formule (4.2) vérifie aussi les propriétés 1 et 2 de la proposition 14. Inversement, toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant les propriétés 1 et 2 de la proposition 14 sera de la forme (4.2) ; il suffit de poser pour cela $p_\omega = P(\{\omega\})$.

4.1.3 Les difficultés de la modélisation

Les exemples précédents (lancé de dé et tirage de la roulette) sont simples et ne posent aucun problème de modélisation : le choix de l'espace des épreuves Ω est immédiat. Ce n'est pas toujours le cas, et l'art du probabiliste est de bien identifier l'espace des épreuves.

Considérons par exemple le problème de la distribution au hasard de trois boules dans deux boites. Il y a 8 répartitions possibles de trois boules numérotées 1, 2, 3 dans deux boites :

$$\lfloor \textcircled{1}\,\textcircled{2}\,\textcircled{3} \,|\, \quad \rfloor \qquad\qquad \lfloor \quad \,|\, \textcircled{1}\,\textcircled{2}\,\textcircled{3} \rfloor \tag{4.3}$$

$$\lfloor \textcircled{1}\;\textcircled{2} \,|\, \textcircled{3} \rfloor \qquad \lfloor \textcircled{1}\;\textcircled{3} \,|\, \textcircled{2} \rfloor \qquad \lfloor \textcircled{2}\;\textcircled{3} \,|\, \textcircled{1} \rfloor \tag{4.4}$$

$$\lfloor \textcircled{1} \,|\, \textcircled{2}\;\textcircled{3} \rfloor \qquad \lfloor \textcircled{2} \,|\, \textcircled{1}\;\textcircled{3} \rfloor \qquad \lfloor \textcircled{3} \,|\, \textcircled{1}\;\textcircled{2} \rfloor \tag{4.5}$$

Si on supprime les numéros sur les boules, on ne peut plus distinguer entre elles les répartitions (4.4) ni les répartitions (4.5), et on ne considère plus que les 4 répartitions :

$$\omega_1 = \lfloor \bigcirc\bigcirc\bigcirc \,|\, \quad \rfloor \qquad \omega_2 = \lfloor \quad \,|\, \bigcirc\bigcirc\bigcirc \rfloor \tag{4.6}$$

$$\omega_3 = \lfloor \bigcirc\;\bigcirc \,|\, \bigcirc \rfloor \qquad \omega_4 = \lfloor \bigcirc \,|\, \bigcirc\;\bigcirc \rfloor \tag{4.7}$$

Pour les boules sans marques, l'espace des épreuves est-il formé des huits répartitions (4.3-4.5), ou des quatres répartitions (4.6-4.7) ? La réponse dépend de la nature des boules. S'il s'agit de boules macroscopiques obéissant à la Mécanique classique, c'est la première réponse qui convient, car les trois boules sont discernables, qu'elles soient numérotées ou non ; s'il s'agit de particules quantiques obéissant à la statistique de Bose-Einstein, par exemple des photons, et les boites des états quantiques, c'est la deuxième réponse qui convient car les trois particules ne sont pas discernables, seul compte leur état quantique. On pourrait, pour ces deux situations, considérer que l'espace des épreuves est l'ensemble à quatre éléments $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ définis par (4.6-4.7). Dans la statistique de Bose-Einstein les quatres épreuves sont équiprobables. Dans la Mécanique classiques les quatre épreuves ne sont pas équiprobables ; leurs poids respectifs sont

$$p_{\omega_1} = p_{\omega_2} = \frac{1}{8}, \qquad p_{\omega_3} = p_{\omega_4} = \frac{3}{8}.$$

4.2 Dénombrement

Le calcul des probabilités consiste à modéliser une situation sous la forme d'un ensemble fini d'épreuves équiprobables, puis de calculer la probabilité des événements, ce qui reveient en vertu de (4.1) à calculer leur nombre d'élément. Dans la pratique il est difficile de lister toutes les épreuves d'un événement comme nous l'avions fait dans les exemples élémentaires du "lancé du dé" du "jeu de la roulette" ou bien de la "répartition de trois boules dans deux boites". Il faut savoir compter le nombre d'éléments d'un ensemble.

4.2.1 Suites avec répétition ou tirages avec remise

Le nombre de mots de n lettres formés avec un alphabet de r lettres est égal à

$$r^n \tag{4.8}$$

puisqu'il y a r possibilités pour choisir la première lettre, de nouveau r possibiltés pour choisir la deuxième lettre et ainsi de suite jusqu'à la n-ième lettre. Ce nombre (4.8) est aussi :

– le nombre de répartitions différentes de n boules numérotées dans r boites,
– le nombre de tirages, avec remise, de n boules d'une urne contenant r boules de couleurs différentes.

4.2.2 Suites sans répétition ou tirages sans remise

Le nombre de mots de n lettres, toutes différentes, formés avec un alphabet de r lettres, avec $r \geq n$, est égal à

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) \tag{4.9}$$

puisqu'il y a r possibilités pour choisir la première lettre, $r-1$ possibiltés pour choisir la deuxième lettre et ainsi de suite, $r-n+1$ possibilités pour choisir la n-ième lettre. Ce nombre (4.9) est aussi :

– le nombre de répartitions différentes de n boules numérotées dans $r \geq n$ boites de telle sorte qu'une boite ne puisse contenir qu'une boule au plus,
– le nombre de tirages, sans remise, de n boules d'une urne contenant $r \geq n$ boules de couleurs différentes.

Lorsque $n = r$, le nombre (4.9) est noté $r!$

$$r! = 1 \cdot 2 \cdots r$$

Il représente le nombre de manières différentes d'ordonner r objets (appelées les permutations des objets).

Problème. On tire 5 chiffres au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous différents ? Ici Ω est l'ensemble de toutes les suites, avec répétition, de $n = 5$ chiffres pris dans l'alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ à $r = 10$ lettres. Ainsi

$$\mathrm{Card}\Omega = 10^5 = 100000$$

L'événement A qui nous intéresse est l'ensemble de toutes les suites de 5 chiffres, tous différents. Son cardinal est

$$\mathrm{Card}A = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$$

Par conséquent $P(A) = 0.3024$.

Problème. On prend au hasard un groupe de 20 personnes. Quelle est la probabilité pour que deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? Ici Ω est l'ensemble de toutes les listes de $n = 20$ dates parmi les $r = 365$ jours de l'année (on oublie le 29 février des années bissextiles, et on suppose que tous les jours de l'année sont équiprobables pour les naissance, ce qui est faux). Ainsi

$$\mathrm{Card}\Omega = 365^{20}.$$

L'événement A "au moins deux sont nés le même jour" est le complémentaire de l'événement B "toutes les dates de naissance sont différentes". Le cardinal de B est

$$\mathrm{Card}B = 365 \cdot 364 \cdots 346.$$

Par conséquent $P(B) = \frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{346}{365} \simeq 0.59$. On en déduit $P(A) = 1 - P(B) \simeq 0.41$.

4.2.3 Combinaisons

Parmi les 2^n mots de n lettres que l'on peut former avec un alphabet de 2 lettres, il y a

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.10}$$

qui comporteront k fois la première lettre et $n-k$ fois la deuxième lettre. Ce nombre (4.10) est aussi :

- le nombre de répartitions différentes de n boules numérotées dans 2 boites de telle sorte qu'il y ait k boules dans la première boite et $n-k$ boules dans la deuxième boite,
- le nombre de sous-ensembles de k éléments parmi n-éléments,

On retrouve ces nombres lorsqu'on développe le binôme

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

4.2.4 Partitions en groupes de taille donnée

Parmi les m^n mots de n lettres que l'on peut former avec un alphabet de m lettres, il y a

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \tag{4.11}$$

qui comporteront n_1 fois la première lettre, n_2 fois la deuxième lettre,... et n_m fois la m-ième lettre, avec $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Ce nombre (4.11) est aussi :

- le nombre de répartitions différentes de n boules numérotées dans m boites de telle sorte qu'il y ait n_1 boules dans la première boite, n_2 boules dans la deuxième boite, ... et n_m boules dans la m-ième boite.
- le nombre de partitions d'un ensemble à n-éléments en m sous-ensembles ayant respectivement n_1, n_2, ..., n_m éléments.

On retrouve ces nombres lorsqu'on développe le polynôme

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}.$$

4.2.5 Subdivisions

Dans la formule précédente, la somme est étendue à toutes les familles de nombres positifs ou nuls n_1, n_2, ..., n_m vérifiant $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Combien y-a-t-il de telles décompositions ? Il s'agit de répartir n objets dans m boites. On peut représenter schématiquement une telle décomposition en séparant par une barre verticale deux boites adjacentes. Considérons une répartition de $n = 8$ boules dans $m = 6$ boites :

$$\bigcirc \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc \mid \mid \mid \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \mid \bigcirc$$

On a ici 1 boule dans la première boite, 3 boules dans la deuxième, 0 boule dans les troisième et quatrième boite, 4 boules dans la cinquième boite et 1 boule dans la sixième boite. Le problème, vu sous cet angle est simplement la répartition des $m-1=5$ barres séparant les $m=6$ boites, sur les $n+m-1=8+6-1$ places disponibles. Ainsi

$$\text{Nombre de répartitions de } n \text{ objets dans } m \text{ boites} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

Cette formule de dénombrement est essentielle dans la statistique de Bose-Einstein : elle donne le nombre de modes d'occupation de m états quantiques par n particules de Bose. En prenant $n=3$ et $m=2$ on retrouve les 4 épreuves ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4 de l'exemple considéré dans la section 4.1.3

4.3 L'indépendance stochastique

4.3.1 Evénements stochastiquement indépendants

Reprenons le problème de la répartition de trois boules numérotées dans deux boites considéré dans la section 4.1.3. Considérons les événements

A : "la boule 1 est dans la boite de gauche",
B : "la boule 2 est dans la boite de gauche",
$A \cap B$: "les boules 1 et 2 sont dans la boite de gauche".

Les événements A et B sont *indépendants* puisque chaque boule *ignore* ce qui arrive à l'autre. On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. On constate donc que l'égalité $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ est vérifiée.

Par contre si on considère l'événement $C = A \cap B$, alors les événements A et C ne sont pas indépendants puisqu'ils concernent tous les deux la boule 1. 0n a $A \cap C = C$ et l'égalité $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ n'est pas vérifiée.

On introduit alors la définition mathématique suivante : deux événements A et B sont dits **stochastiquement indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Plus généralement, la famille d'événements A_1, A_2,..., A_m est dite **stochastiquement indépendante** de la famille d'événements B_1, B_2,..., B_m si

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j) \qquad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

Si les événements A_1, A_2,..., A_m sont stochastiquement indépendants (entre eux) alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_m). \tag{4.12}$$

4.3.2 Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. Le nombre

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

s'appelle la **probabilité conditionnelle** de A sachant B. Lorsque les deux événements A et B sont stochastiquement indépendants, c'est à dire lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, alors on a $P(A|B) = P(A)$. En utilisant la formule (4.1) on obtient

$$P(A|B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card} B}.$$

Cela revient à compter parmi toutes les épreuves équiprobables qui constituent l'événement B, celles qui appartiennent en outre à l'élément A ? Il s'agit donc de la probabilité pour que A se produise, mais dans l'espace plus petit des épreuves qui correspondent à la réalisation de B. L'application

$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \to P(A|B) \in [0, 1]$$

vérifie les propriétés 1 et 2 de la proposition 14. C'est donc une probabilité. Les probabilités conditionnelle sont très utiles car elles permettent plus facilement de calculer des probabilités. Illustrons cela dans le problème suivant :

Problème. Une boite contient $n = p + q$ boules, p blanches et q noires. On effectue deux tirages (sans remise). Considérons les événements

A_1 : "la première boule tirée est blanche",
A_2 : "la deuxième boule tirée est blanche".

On a clairement $P(A_1) = \frac{p}{n}$ car il y a p boules blanches dans une boite contenant n boules et $P(A_2|A_1) = \frac{p-1}{n-1}$, car la première boule tirée étant blanche, il reste $p-1$ boules blanches dans une boite contenant $n-1$ boules. Par conséquent

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)}.$$

Le calcul direct aurait (heureusement) donné le même résultat. En effet si on considère comme espace d'épreuves l'ensemble Ω de tous les tirages (sans remise) de deux boules dans une une boite contenant n boules alors $\mathrm{Card}\Omega = n(n-1)$. L'événement $A_2 \cap A_1$ correspond simplement à l'événement de Ω : "les deux boules sont blanches". Or le nombre de couples formés de deux boules blanches est $p(p-1)$. Par conséquent $P(A_2 \cap A_1) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)}$.

On se propose maintenant de calculer la probabilité de l'événement A_2. Introduisons pour cela l'événement

A_1^c : "la première boule tirée n'est pas blanche (elle est donc noire)".

Alors on a

$$A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c).$$

On a bien évidemment $P(A_1^c) = \frac{q}{n}$ car il y a q boules noires dans une boite contenant n boules et $P(A_2|A_1^c) = \frac{p}{n-1}$, car la première boule tirée étant noire, il reste p boules blanches dans une boite contenant $n-1$ boules. Par conséquent

$$P(A_2 \cap A_1^c) = P(A_2|A_1^c)P(A_1^c) = \frac{pq}{n(n-1)}.$$

Comme les événements $A_2 \cap A_1$ et $A_2 \cap A_1^c$ sont disjoints, on en déduit que

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)} + \frac{pq}{n(n-1)} = \frac{p}{n}.$$

Noter que ce résultat n'est pas intuitivement évident. Bien entendu, on aurait pu calculer la probabilité $P(A_2 \cap A_1^c)$ directement. Dans l'espace Ω de cardinal $n(n-1)$ considéré ci dessus, l'événement $A_2 \cap A_1^c$ correspond simplement à l'événement de Ω : "la première boule est blanche et la second est noire". Son cardinal est égal à pq. Par conséquent $P(A_2 \cap A_1^c) = \frac{pq}{n(n-1)}$.

Cette manière de calculer des probabilités est très utile. Elle se généralise de la manière suivante. Soit $A \in \Omega$ un événement dont on veut calculer la probabilité. Soit

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$$

une partition de lespace des épreuves en événements disjoints deux à deux. Comme les événements $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, ..., $A \cap E_n$ sont disjoints deux à deux et que leur réunion est égale à A on a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n) \\ &= P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \cdots + P(A|E_n)P(E_n). \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3.3 Réunion d'événements

Si A et B sont des événements disjoints alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B$ et on en déduit que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, comme il avait été dit dans la proposition 14. Pour des événements non nécéssairement disjoints on utilise la formule de Poincaré

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

On en déduit alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pour une réunion de trois événements on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}A + \mathrm{Card}B + \mathrm{Card}C - \mathrm{Card}(A \cap B) \\ &- \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Plus généralement on a

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \leq j \leq n} \mathrm{Card}(A_j) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathrm{Card}(A_j \cap A_k)$$

$$+ \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} \mathrm{Card}(A_j \cap A_k \cap A_l) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathrm{Card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \tag{4.14}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{1 \leq j \leq n} P(A_j) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} P(A_j \cap A_k) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} P(A_j \cap A_k \cap A_l) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned}$$

Nous allons appliquer cette formule pour résoudre le problème suivant :

Problème. On distribue n lettres au hasard entre leur n destinataires. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des destinataires ne recoive la lettre qui lui était destinée.

Quel est l'espace Ω des épreuves ? Chacune des épreuves est une permutation des n lettres. Par conséquent $\mathrm{Card}\Omega = n!$. L'événement considéré est B : "aucun destinataire ne reçoit sa lettre". Son complémentaire est A : "au moins un destinataire reçoit sa lettre". Cet événement est la réunion $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ des événements :

A_1 : "le premier destinataire reçoit la lettre qui lui était destinée",
A_2 : "le deuxième destinataire reçoit la lettre qui lui était destinée",
...
A_n : "le n-ième destinataire reçoit la lettre qui lui était destinée".

Considérons la formule (4.14). Dans cette somme il y a

- n termes dans la première somme mettant en jeux les nombres $\mathrm{Card}(A_j)$. Le cardinal de A_j est le nombre de permutations des $n-1$ lettres restantes, c'est à dire $(n-1)!$,
- $\binom{n}{2}$ termes dans la deuxième somme mettant en jeux les nombres $\mathrm{Card}(A_j \cap A_k)$. Le cardinal de $A_j \cap A_k$ est le nombre de permutations des $n-2$ lettres restantes, c'est à dire $(n-2)!$,
- $\binom{n}{3}$ termes dans la troisième somme mettant en jeux les nombres $\mathrm{Card}(A_j \cap A_k \cap A_l)$. Le cardinal de $A_j \cap A_k \cap A_l$ est le nombre de permutations des $n-3$ lettres restantes, c'est à dire $(n-3)!$,
- et ainsi de suite...

Par conséquent

$$\mathrm{Card}A = n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + (-1)^{m-1}\binom{n}{m}(n-m)! \cdots + (-1)^{n-1} = n! \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!}.$$

En divisiant par $\mathrm{Card}\Omega = n!$ on obtient

$$P(A) = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!}.$$

En passant au complémentaire on trouve

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

En faisant tendre n vers l'infini on voit que $P(A)$ tend vers e^{-1}.

Remarque Comme le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires, on a

$$B = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n,$$

où l'événement B_j est le complémentaire de l'événement A_j. On ne peut pas utiliser la formule (4.12) et poser

$$P(B) = P(B_1)P(B_2) \cdots P(B_n),$$

car les événements B_j ne sont pas stochatiquement indépendants. En effet, B_j est l'événement "le destinataire j ne reçoit pas la lettre qui lui était destinée" ; donc un autre destinaire la reçoit, alors qu'elle ne lui était pas destinée non plus. Ainsi, le fait d'appartenir à l'un des B_j augmente la probabilité d'appartenir aussi à l'un des autres.

4.4 Variables aléatoires

4.4.1 Loi d'une variable aléatoire

Une **variable aléatoire** est une fonction définie sur l'espace des épreuves, à valeurs réelles. Une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ prend une valeur numérique déterminée $X(\omega)$ pour chaque épreuve $\omega \in \Omega$. Ce n'est pas la valeur numérique $X(\omega)$ prise par la variable aléatoire X qui est *choisie au hasard*, mais l'épreuve ω. Le choix de ω parmi toutes les épreuves équiprobables de Ω détermine alors la valeur $X(\omega)$ que prendra la variable aléatoire X.

Par exemple dans le "lancé de trois dès" on peut considérer comme variable aléatoire la somme des trois chiffres obtenus. La variable aléatoire prend toutes les valeurs entières entre 3 à 18. Ici l'espace Ω a pour cardinal 6^3.

Soit X une variable aléatoire. Elle prend un nombre fini de valeurs dans l'ensemble

$$X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}, \qquad n \leq \mathrm{Card}\Omega.$$

Pour chaque $x_k \in X(\Omega)$, soit

$$A_k = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}$$

l'ensemble des épreuves pour lesquelles la variable aléatoire X prend la valeur x_k. Notons $p_k = P(A_k)$. La **loi de la variable aléatoire** X est la donnée des $(x_k, p_k)_{1 \leq k \leq n}$. On note plus simplement

$$p_k = P(X = x_k).$$

Problème : marche aléatoire (ou marche de l'ivrogne). Une marche aléatoire à une dimension est le mouvement d'un point matériel qui fait un pas vers l'avant ou un pas vers l'arrière sur un axe, chacune de ces deux possibilités étant choisie au hasrad. Chaque mouvement d'une marche aléatoire de n pas est déterminé par la liste des n choix de sens de déplacement : on peut le représenter par une liste de n signes $+$ ou $-$. L'espace des épreuves pour une marche aléatoire à n pas est de cardinal 2^n. Soit x un nombre entier. Quelle est la probabilité pour que la marche aléatoire à n pas , partie de 0, aboutisse à x. Soit p le nombre de signes $+$ (un pas vers l'avant) et q le nombre de signes $-$ (un pas vers l'arrière), avec $p + q = n$. La marche aléatoire aboutit en x si et seulement si

$$p - q = x.$$

Par conséquent on doit avoir $p = \frac{n+x}{2}$ et $q = \frac{n-x}{2}$. Il faut donc que n et x aient la même parité, sinon, il n'y a aucune marche qui aboutit en x. Comme il y a en tout $\frac{n!}{p!q!}$ possibilités de placer les p signe $+$ et q signes $-$ on en déduit que la probabilité de l'événement

A : "la marche aléatoire de n pas, partie de 0, aboutit à x".

est

$$P(A) = \begin{cases} 2^{-n}\frac{n!}{p!q!} & \text{si } n \text{ et } x \text{ ont la même parité,} \\ 0 & \text{si } n \text{ et } x \text{ n'ont pas la même parité.} \end{cases}$$

Considérons maintenant la variable aléatoire X qui est l'abscisse atteinte par la marche aléatoire, partant de 0, au pas n. Elle prend les valeurs $-n$, $-n+1$, ..., $n-1$, n avec les probabilités suivantes

$$\begin{array}{l} P(X=-n) = 2^{-n}, \\ P(X=-n+1) = 0, \\ P(X=-n+2) = 2^{-n}\binom{n}{1}, \\ P(X=-n+3) = 0, \\ P(X=-n+4) = 2^{-n}\binom{n}{2}, \\ \ldots \\ P(X=n-4) = 2^{-n}\binom{n}{2}, \\ P(X=n-3) = 0, \\ P(X=n-2) = 2^{-n}\binom{n}{1}, \\ P(X=n-1) = 0, \\ P(X=n) = 2^{-n} \end{array}$$

4.4.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Etant donnée une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, avec les probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n. On appelle **moyenne** ou **espérance mathématique** de X la grandeur

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

On appelle **variance** de X la grandeur

$$Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2\, p_k.$$

On appelle **écart type** de X la racine carrée de la variance $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$. La variance s'écrit aussi

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2E(X) \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + E(X)^2 \sum_{k=1}^{n} p_k = E(X^2) - E(X)^2.$$

Soient X et Y des variables aléatoires. On a

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

4.4.3 Variables aléatoires stochastiquement indépendantes

On dit que deux variables aléatoires X et Y prenant respectivement les valeurs x_1, ..., x_m et y_1, ..., y_n sont **stochastiquement indépendantes** si la famille d'événements $A_k : X = x_k$ est stochastiquement indépendante de la famille d'événements $B_l : Y = y_l$, c'est à dire si

$$P(X = x_k \text{ et } Y = y_l) = P(X = x_k)P(Y = y_l), \qquad \text{pour tous } k \text{ et } l.$$

Soient X et Y des variables aléatoires stochastiquement indépendantes, on a

$$E(XY) = E(X)E(Y), \qquad Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Bibliographie

[1] **J. Harthong**, *Probabilités et statistiques. De l'intuition aux applications*, Diderot, Paris, 1996

[2] **M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, E. Chikine**, *Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytechniciens*, tome 2, De Boeck, Bruxelles, 1993

[3] **M. R. Spiegel**, *Analyse de Fourier et applications aux problèmes de valeurs aux limites*, Série Schaum, McGraw-Hill, 1991

Table des matières