



L'analyse a posteriori et ses applications

Fatma Zohra Nouri

**Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université Badji Mokhtar, ANNABA**

L'analyse a posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillages en éléments et volumes finis. Toutefois elle a bien d'autres applications.

À propos des estimations a posteriori

Soit X un espace de Banach, et A une application continue de X dans X .
Pour un élément f de X , on s'intéresse à la discrétisation de l'équation :

Trouver u dans X tel que

$$A(u) = f.$$

δ : paramètre positif

On considère le problème :

Trouver u_δ dans X_δ tel que

$$A_\delta(u_\delta) = f_\delta,$$

où X_δ est un sous-espace de dimension finie de X , A_δ une approximation de A et f_δ une approximation de f dans X_δ .

Estimations a priori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq F(\delta, u) + H(\delta, f).$$

La quantité $F(\delta, u)$ est en général une puissance de δ multipliée par une certaine norme de u , elle fait donc appel à la régularité de u (**la plupart du temps inconnue**).

\implies prouve la convergence de la méthode.

Estimations a posteriori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

La quantité $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$ peut se calculer explicitement une fois la solution discrète u_δ calculée.

\implies Permet de vérifier des critères de sécurité.

Application de base : adaptation de maillages

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

Si l'on suppose que la quantité $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$ s'écrit $c \left(\sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, où les η_k sont des quantités "locales" (liées à des sous-domaines de petites tailles), les η_k forment une famille d'**indicateurs d'erreur**.

Critère d'optimalité : Une famille d'indicateurs d'erreur $(\eta_k)_k$ est optimale s'il existe des constantes c_1 et c_2 indépendantes de δ telles que

$$\|u - u_\delta\|_X \leq c_1 \left(\sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + K_1(\delta, f),$$

$$\eta_k \leq c_2 \|u - u_\delta\|_{X_k} + K_2^k(\delta, f),$$

où X_k désigne l'espace des restrictions des fonctions de X à un domaine de petite taille.

Lorsque la famille d'indicateurs d'erreur est optimale, on peut penser que les η_k forment une bonne carte de l'erreur

Stratégie d'adaptation :

$\bar{\eta}$: moyenne des η_k .

Lorsque un des η_k est supérieur à $\bar{\eta}$, on raffine le maillage dans le sous-domaine correspondant à cet η_k .

Sous des hypothèses convenables et pour un maillage initial fixé, on peut prouver la convergence de la méthode.

W. Dörfler

Autre application : discrétisations multi-étapes

Dans un grand nombre de cas, la discrétisation fait appel à un ou plusieurs problèmes intermédiaires (non discrets**) avant le problème discret final. On peut cependant calculer des indicateurs d'erreur ne dépendant que de la solution discrète.**

Le but de l'analyse a posteriori est alors d'optimiser tous les paramètres liés à la discrétisation.

Une application récente : couplage automatique de modèles

Dans un grand nombre de cas, la discrétisation du modèle complet – non linéaire ou tridimensionnel ou faisant intervenir plusieurs centaines d'inconnues – dans tout le domaine est trop complexe. L'analyse a posteriori permet de déterminer les parties du domaine où l'on peut discrétiser un modèle simplifié sans augmenter l'erreur globale.

M. Braack, A. Ern

Plan du cours :

- **Indicateurs d'erreur et adaptation de maillage**
 - ★ Les estimations de base
 - ★ Un exemple de discrétisation non conforme
- **Indicateurs d'erreur en discrétisation multi-étapes**
 - ★ Introduction à la discrétisation multi-étapes
 - ★ Adaptation en temps et espace pour une équation parabolique

Principales restrictions et limitations :

- ★ Estimations en norme de l'énergie
 - ★ Indicateurs essentiellement de type résidu
 - ★ Discrétisations principalement par éléments finis
 - ★ Maillages isotropes

Les estimations de base

- Indicateurs par résidu,
- Indicateurs par résidu et problèmes locaux,
- Extension au problème de Stokes.

Travail de B. Metivet et R. Verfürth

Indicateurs par résidu

Le problème modèle que l'on considère ici est l'équation de Laplace.

Ω : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où la forme $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\mathbf{x}.$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le lemme de Lax-Milgram entraîne que

Le problème variationnel admet une solution unique u dans $H_0^1(\Omega)$. En outre, cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

où c est la constante de Poincaré–Friedrichs, donc ne dépend que de la géométrie de Ω .

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres, au sens usuel que

- Pour tout h , $\overline{\Omega}$ est l'union des éléments de \mathcal{T}_h ,
- Pour tout h , l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est soit vide soit un sommet soit un côté entier soit une face entière de ces deux éléments,
- Le quotient h_K/ρ_K du diamètre h_K d'un élément K de \mathcal{T}_h par le diamètre ρ_K de son cercle inscrit ou de sa sphère inscrite est inférieur ou égal à une constante σ qui ne dépend ni de K ni de h .

h : plus grand diamètre des éléments K de \mathcal{T}_h .

$$X_h^0 = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K) \right\}.$$

Le problème discret est construit par la méthode de Galerkin.

Trouver u_h dans X_h^0 tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

Il admet une solution unique.

Estimations d'erreur a priori : Si la solution u appartient à $H^{s+1}(\Omega)$, $0 \leq s \leq \ell$,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^s \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

Les indicateurs d'erreur par résidu

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'un élément K de \mathcal{T}_h qui ne sont pas contenues dans $\partial\Omega$.

h_K : diamètre d'un élément K de \mathcal{T}_h .

h_e : longueur ou diamètre d'un élément e de \mathcal{E}_K .

f_h : approximation de la donnée f dans

$$Z_h = \left\{ g_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_m(K) \right\}.$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

Indicateur par résidu : Si l'on supprime les indices h dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète u_h est connue.

Par exemple, lorsque ℓ est égal à 1, m est le plus souvent choisi égal à 0, et

$$\eta_K = h_K \text{mes}(K)^{\frac{1}{2}} |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \text{mes}(e)^{\frac{1}{2}} |[\partial_n u_h]_e|.$$

Pourquoi ?

Équation du résidu :

L'équation du résidu s'obtient en "appliquant" le problème continu à l'erreur $u - u_h$.

Pour tous v dans $H_0^1(\Omega)$ et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v - v_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K f(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K \mathbf{grad} u_h \cdot \mathbf{grad} (v - v_h) \, d\mathbf{x}, \right. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau)(v - v_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

La majoration de l'erreur a posteriori

L'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ entraîne

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

D'après l'équation du résidu, par inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$a(u - u_h, v) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)}) \|v - v_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v - v_h\|_{L^2(e)} \right).$$

On prend v_h égal à l'image de v par l'opérateur de régularisation de Clément.

Outil de base : opérateur de Clément

Cet opérateur R_h est défini sur des fonctions non régulières (en particulier non continues) à valeurs dans X_h^0 et possède des propriétés d'approximation locale.

Pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \leq c h_K \|v\|_{H^1(\Delta_K)},$$

où Δ_K désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_h dont l'intersection avec K est non vide,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Delta_e)},$$

où Δ_e désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_h dont l'intersection avec e est non vide,

La constante c est difficile à évaluer et dépend grandement du paramètre de régularité σ .

$$a(u - u_h, v) \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K \left(\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right) \|v\|_{H^1(\Delta_K)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v\|_{H^1(\Delta_e)} \right).$$

plus encore une inégalité de Cauchy–Schwarz.

Théorème. Il existe une constante c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une majoration pour chaque indicateur d'erreur

Équation du résidu :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) v(\tau) d\tau \right).$$

Pour tout K dans \mathcal{T}_h , on choisit v égal à v_K , avec

$$v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K \quad \text{sur } K \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur K ,

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

On utilise alors des inégalités inverses sur chaque K .

Outil de base : inégalités inverses

Soit r un entier ≥ 0 . Les inégalités inverses se démontrent par passage à l'élément de référence, grâce à l'équivalence de normes sur un espace de dimension finie.

Pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(K)$,

$$c \|v\|_{L^2(K)} \leq \|v \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)} \leq c' \|v\|_{L^2(K)},$$

et

$$\|v\|_{H^1(K)} \leq c h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}.$$

La constante c dépend encore du paramètre de régularité σ mais est plus facile à évaluer.

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

Puis on note que $f_h + \Delta u_h$ appartient à $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}}(K)$, donc que v_K appartient à $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}+d+1}(K)$.

$$h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(K)} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).$$

\implies Une majoration du premier terme de η_K .

Pour tout K dans \mathcal{T}_h et $e \in \mathcal{E}_K$, si K' désigne l'autre élément de \mathcal{T}_h qui contient e , on choisit v égal à v_e , avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n u_h] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K').$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur e .

$\mathcal{L}_{e,\kappa}$: opérateur de relèvement des polynômes de $\mathcal{P}_{\ell-1+d}(e)$ s'annulant sur ∂e en des polynômes sur κ s'annulant sur $\partial\kappa \setminus e$, construit par transformation affine à partir d'un opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ similaire sur le triangle de référence.

$$\begin{aligned} \|([\partial_n u_h] \psi_e^{\frac{1}{2}})\|_{L^2(e)}^2 &\leq \|u - u_h\|_{H^1(K \cup K')} \|v_e\|_{H^1(K \cup K')} + \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')} \\ &\quad + \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')}. \end{aligned}$$

Outil de base : inégalités inverses (bis) plus

Les résultats suivants se démontrent encore et toujours par passage à l'élément de référence,

Pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(e)$,

$$c \|v\|_{L^2(e)} \leq \|v \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)} \leq c' \|v\|_{L^2(e)}.$$

et pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(e)$ s'annulant sur ∂e ,

$$\|\mathcal{L}_{e,\kappa} v\|_{L^2(\kappa)} + h_e |\mathcal{L}_{e,\kappa} v|_{H^1(\kappa)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(e)}.$$

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(K \cup K')} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} + h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \right)$$

\implies Une majoration du second terme de η_K .

Théorème. L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K , $K \in \mathcal{T}_h$, et pour une constante c indépendante de K et de h :

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

où ω_K désigne l'union soit des triangles partageant au moins un côté avec K ($d = 2$), soit des tétraèdres partageant au moins une face avec K ($d = 3$).

Conclusions

- Aux termes portant sur la donnée près, l'erreur est équivalente à la quantité $\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}}$, avec des constantes d'équivalence indépendantes de h .

$$c_1 \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} - h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \right. \\ \left. \leq c_2 \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} + h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \right).$$

Estimations parfaitement optimales.

- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer dès que l'on connaît la solution discrète.
- La dernière estimation est locale.

Permet une stratégie d'adaptativité très simple.

Cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$X_h = \left\{ v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K) \right\}.$$

Le problème discret s'écrit

Trouver u_h dans X_h tel que

$$u_h = g_h \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où g_h appartient à l'espace des traces de X_h sur $\partial\Omega$ et est en général égal à l'interpolé de Lagrange de g .

Les indicateurs d'erreur sont définis exactement comme précédemment :

$$\eta_K = h_K \operatorname{mes}(K) |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}(e) |[\partial_n u_h]_e|.$$

L'analogie des estimations précédentes s'écrit maintenant

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|g - g_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

Cas de conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = k & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On suppose que

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau) \, d\tau = 0.$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v(\tau) \, d\tau,$$

où $L_0^2(\Omega)$ désigne l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Le problème discret s'écrit

Trouver u_h dans $X_h \cap L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v_h \in X_h \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v_h(\tau) \, d\tau,$$

\mathcal{E}_K^b : ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'un élément K de \mathcal{T}_h qui sont contenues dans $\partial\Omega$.

k_h : approximation de la donnée k qui appartient à $\mathcal{P}_m(e)$ pour tout e dans \mathcal{E}_K^b , $K \in \mathcal{T}_h$.

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k_h - \partial_n u_h\|_{L^2(e)}.$$

Pourquoi ?**Équation du résidu :**

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, v) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right. \\
& - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) (v - v_h)(\tau) d\tau \\
& \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} \left(\int_e (k_h - \partial_n u_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) d\tau + \int_e (k - k_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) d\tau \right) \right).
\end{aligned}$$

On a les estimations

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e \|k - k_h\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} + \sum_{e \subset \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k - k_h\|_{L^2(e)} \right).$$

Indicateurs par résidu et problèmes locaux

L'idée est maintenant d'évaluer le résidu par la résolution de problèmes discrets locaux qui peuvent être munis de conditions aux limites soit de type Neumann soit de type Dirichlet (sur un domaine légèrement plus grand).

Problèmes de Neumann locaux

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$X_h(K) = \left\{ v_K \in \mathcal{P}_L(K); v_K = 0 \text{ aux coins de } K \text{ et sur } \partial\Omega \cap K \right\},$$

où L est égal à $\sup\{\ell + d - 1, m + d + 1\}$.

Trouver u_K dans $X_h(K)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h(K), \quad & \int_K \mathbf{grad} u_K \cdot \mathbf{grad} w_K \, dx \\ & = \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K^N est défini par

$$\eta_K^N = |u_K|_{H^1(K)}.$$

Proposition. On a les estimations

$$c\eta_K^N \leq \eta_K \leq c'\eta_K^N.$$

Démonstration :

1) Pour majorer η_K^N , on choisit dans le problème de Neumann local v_K égal à u_K , ce qui donne

$$|u_K|_{H^1(K)}^2 \leq \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|u_K\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|u_K\|_{L^2(e)}.$$

Puis on utilise les inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées, dues au fait que les fonctions de $X_h(K)$ s'annulent aux sommets de K et prouvées par passage à l'élément fini de référence :

$$\forall w_K \in X_h(K), \quad \|w_K\|_{L^2(K)} \leq c h_K |w_K|_{H^1(K)}$$

$$\text{et} \quad \|w_K\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} |w_K|_{H^1(K)}.$$

2) Pour majorer η_K , on choisit dans le problème de Neumann local w_K successivement égal aux restrictions à K de v_K , puis égal de v_e pour tout e dans \mathcal{E}_K .

Rappel : Par exemple, $v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K$.

plus les mêmes inégalités inverses que précédemment.

Chaque indicateur η_K^N est parfaitement équivalent à η_K . Donc on a la même majoration de l'erreur globale par

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

plus des termes portant sur les données et la même majoration de η_K^N en fonction de l'erreur locale.

Problèmes de Dirichlet locaux

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$X_h^0(K) = \left\{ v_K \in H_0^1(\omega_K); \forall \kappa \subset \omega_K, v_K|_{\kappa} \in \mathcal{P}_L(\kappa) \right\}.$$

Trouver u_K^0 dans $X_h^0(K)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h^0(K), \quad & \int_{\omega_K} \text{grad } u_K^0 \cdot \text{grad } w_K \, dx \\ & = \sum_{\kappa \subset \omega_K} \int_{\kappa} (f_{mh} + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K^D est défini par

$$\eta_K^D = |u_K^0|_{H^1(K)}.$$

Proposition. On a les estimations

$$\eta_K^D \leq c \sum_{\kappa \subset \omega_K} \eta_\kappa \quad \text{et} \quad \eta_K \leq c' \eta_K^D.$$

Démonstration : Dans le problème de Dirichlet local, on choisit successivement w_K

1) égal à u_K^0 (plus exactement les mêmes inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées que précédemment),

2) égal aux restrictions à ω_K de v_K puis de v_e pour tout e dans \mathcal{E}_K (plus encore et toujours les mêmes inégalités inverses).

Les indicateurs η_N^D ont des propriétés parfaitement équivalentes à celles des η_K^N .

Problèmes locaux réduits

Les résultats précédents sont encore valables si on remplace $X_h(K)$ par

$$\widetilde{X}_h(K) = \mathbf{Vect} \left(\begin{aligned} &\{\psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K)\}, \\ &\cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{\mathcal{L}_{e, K}(\psi_e w)|_K, w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e)\} \end{aligned} \right),$$

et $X_h^0(K)$ par

$$\widetilde{X}_h^0(K) = \mathbf{Vect} \left(\begin{aligned} &\{\psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K)\}, \\ &\cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{\mathcal{L}_{e, \omega_K}(\psi_e w), w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e)\} \end{aligned} \right).$$

Par exemple, pour $\ell = 1$ et $m = 0$,

$\dim X_h(K) = 7$ en dimension 2 et 31 en dimension 3,

$\dim \widetilde{X}_h(K) = 4$ en dimension 2 et 5 en dimension 3.

Les indicateurs par problèmes locaux réduits sont donc beaucoup moins chers à calculer que les indicateurs par problèmes locaux. Toutefois leur extension à des problèmes plus compliqués, par exemple non linéaires, s'avère nettement plus coûteuse que pour les indicateurs par résidu.

Indicateurs pour le problème de Stokes

Ω : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + \text{grad } p = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle équivalente

Trouver (u, p) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\text{div } u)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Pour tout \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution unique.

Requiert ellipticité + condition inf-sup.

Rappel :

Soit X et M deux espaces de Hilbert et $b(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $X \times M$.

Les deux propriétés suivantes sont **équivalentes** :

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall q \in M, \quad \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M.$$

(ii) L'opérateur B défini de X dans M' par

$$\forall v \in X, \forall q \in M, \quad \langle Bv, q \rangle = b(v, q),$$

est un isomorphisme de l'orthogonal de son noyau sur M' , et la norme de son inverse est $\leq \beta^{-1}$.

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d \quad \text{et} \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

Le problème discret

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_h \cdot \text{grad } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Une condition inf-sup liant X_h et M_h est nécessaire pour que le problème discret soit bien posé et aussi pour obtenir des majorations d'erreur a priori.

Les indicateurs d'erreur par résidu

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h\|_{L^2(K)^d} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}\|_{L^2(e)^d} + \|\text{div } \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)},$$

où \mathbf{f}_h est une approximation de \mathbf{f} dans Z_h^d .

Indicateur par résidu : Si l'on supprime les indices h dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète (\mathbf{u}_h, p_h) est connue.

Pourquoi ?

Équations du résidu :

Pour tous v dans $H_0^1(\Omega)$ et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \text{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v})(\mathbf{x})(p - p_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad} p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

Pour tout q dans $L_0^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}))q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u}_h)(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Et après ?

R. Verfürth

On pose, avec $U = (\mathbf{u}, p)$ et $V = (\mathbf{v}, q)$,

$$A(U, V) = \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

Le problème continu :

Trouver U dans $Y = H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall V \in Y, \quad A(U, V) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle .$$

Le problème discret :

Trouver U_h dans $Y_h = X_h \times M_h$ tel que

$$\forall V_h \in Y_h, \quad A(U_h, V_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle .$$

Équation du résidu : Pour tout V dans Y et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned}
 A(U - U_h, V) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 & + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cot(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \\
 & \left. + \int_K (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right).
 \end{aligned}$$

Le problème de Stokes admet une solution unique pour tout (\mathbf{f}, g) dans $H^{-1}(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Comme (ii) implique (i),

La forme $A(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf-sup

$$\forall U \in Y, \quad \sup_{V \in Y} \frac{A(U, V)}{\|V\|_Y} \geq \beta \|U\|_Y.$$

On applique cette inégalité inf-sup avec U remplacé par $U - U_h$, puis on utilise l'opérateur de Clément.

Théorème. On suppose que X_h contient l'espace

$$\left\{ \mathbf{v}_h \in H_0^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)^d \right\}.$$

Il existe une constante c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ne nécessite aucune condition inf-sup entre X_h et M_h .

Pour tout K dans \mathcal{T}_h , on choisit successivement dans l'équation du résidu,

1) V égal à $(v_K, 0)$ et v_h égal à 0, avec

$$v_K = (f_h + \Delta u_h - \text{grad } p_h) \psi_K \quad \text{sur } K \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K,$$

2) pour tout e dans \mathcal{E}_K , V égal à $(v_e, 0)$ et v_h égal à 0, avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n u_h - p_h \mathbf{n}] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'),$$

3) V égal à $(0, q_K)$ et v_h égal à 0, avec

$$q_K = \text{div } u_h \quad \text{sur } K \quad q_K = 0. \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

Puis on utilise les mêmes inégalités inverses que précédemment.

Théorème. L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K , $K \in \mathcal{T}_h$, et pour une constante c indépendante de K et de h :

$$\eta_K \leq c \left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d} \right).$$

- On obtient les mêmes propriétés d'optimalité que pour l'équation de Laplace.
- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer.
- L'évaluation des indicateurs par problèmes locaux nécessite des problèmes locaux réduits (et une condition inf-sup entre chaque paire d'espaces locaux).

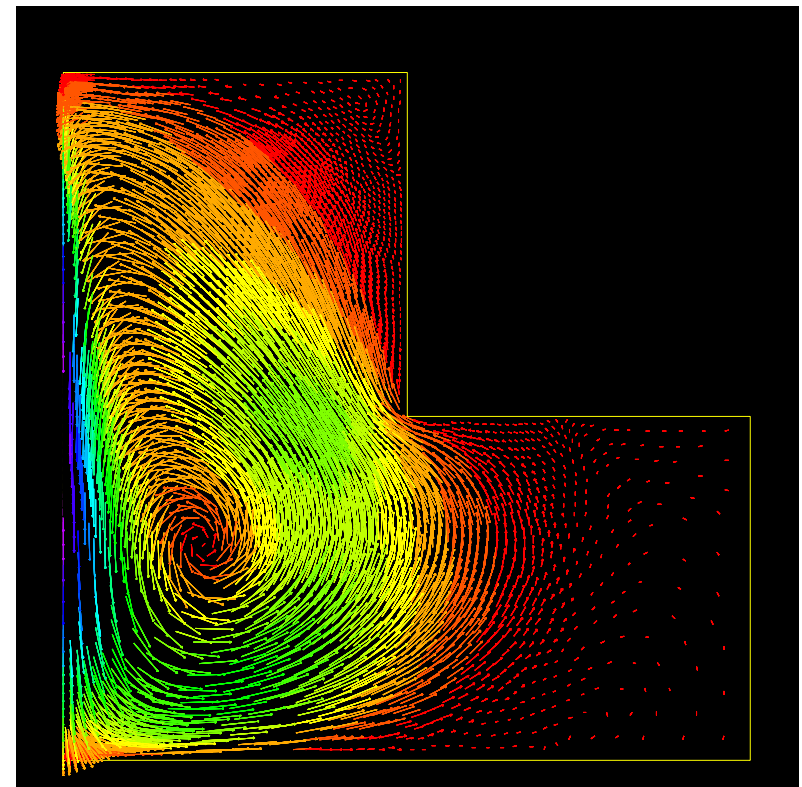
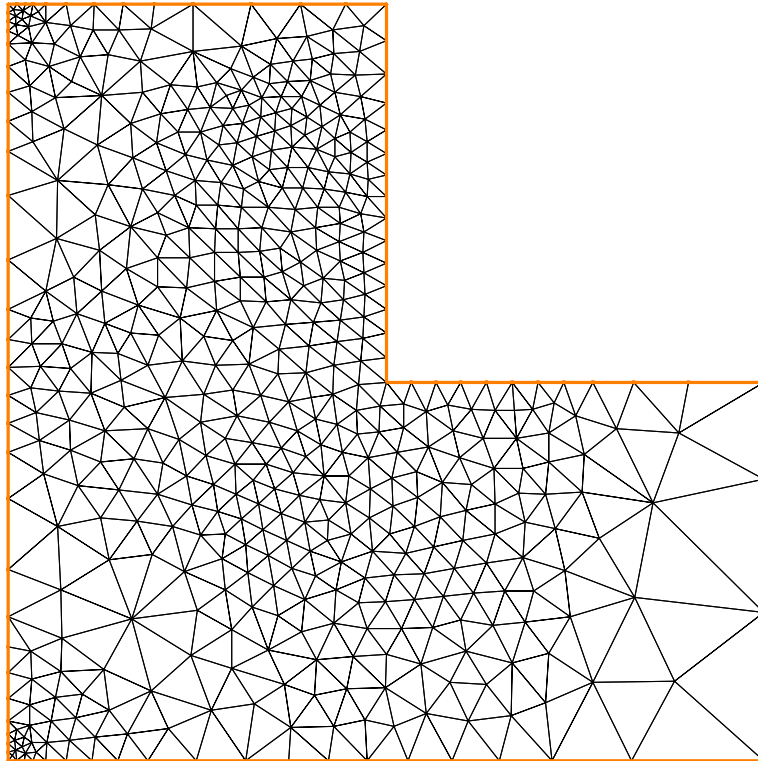
- **Équations de Navier–Stokes**

**J. Pousin, J. Rappaz
R. Verfürth**

Aucune difficulté particulière.

Données : viscosité $\nu = 10^{-2}$ et vitesse tangentielle sur bord gauche non nulle.

$$\varepsilon = 0,14 \times 10^{-2}$$



References

- [1] Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel — A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations, *Numer. Math.* **96** (2003), 17–42.
- [2] M. Amara, C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — Regularized finite element discretizations of a grade-two fluid model, à paraître dans *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*.
- [3] Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis, F. Hecht — A truncated Fourier/finite element discretization of the Stokes equations in an axisymmetric domain, à paraître dans *Math. Models and Methods in Applied Sciences* **16** (2006).
- [4] A. Bergam, C. Bernardi, Z. Mghazli — A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equation, *Math. Comput.* **74** (2005), 1117–1138.
- [5] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday plus M. Azaïez — 'Spectral Methods for Axisymmetric Domains, Series in Applied Mathematics 3, Gauthier-Villars et North-Holland (1999).
- [6] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* **13** (2003), 1599–1628.

- [7] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier–Stokes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **336** série I (2003), 671–676.
- [8] C. Bernardi, B. Métivet, R. Verfürth — Analyse numérique d’indicateurs d’erreur, dans *Maillage et adaptation*, édité par P.-L. George, Hermès (2001), 251–278.
- [9] C. Bernardi, E. Süli — Time and space adaptivity for the second–order wave equation, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* (2005), 199–225.
- [10] C. Bernardi, R. Verfürth — ‘A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations, *Modél. Math. et Anal. Numér.* **38** (2004), 437–455.
- [11] M. Braack, A. Ern — A posteriori control of modeling errors and discretization errors, *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation* **1** (2003), 221–238.
- [12] M. Dauge, E. Faou — in preparation.
- [13] J. Pousin, J. Rappaz — Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov–Galerkin methods applied to nonlinear problems, *Numer. Math.* **69** (1994), 213–231.
- [14] R. Verfürth — *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley and Teubner Mathematics (1996).