Université de Haute-Alsace 2005-2006

L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

PARTIEL

Durée : 3 heures. Documents et calculatrices interdits.

Les parties I et II devront être rédigées sur deux copies séparées.

Partie I

Exercice 1.

1) Donner la définition d'un sous-groupe.

2) Donner la définition d'un homomorphisme de groupes.

Exercice 2. Notons $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a+bi$, où a et b appartiennent $\mathbb{Z}$.

1) Montrer que si $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, alors $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, où $z_1 z_2$ est le produit des nombres complexes z_1 et z_2.

2) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que si z admet un inverse pour le produit, alors le module de z est 1.

3) On note par G l'ensemble des éléments $z \in \mathbb{Z}[i]$ qui admettent un inverse pour le produit. Montrer que $G = \{1, -1, i, -i\}$.

4) Pour chaque $z \in G$, déterminer z^{-1}.

5) Écrire la table de multiplication pour G.

6) Montrer que G muni du produit des nombres complexes est un groupe.

Partie II

Exercice 3. Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 4. Soient $M \in \mathbb{R}$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que M est la borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant M \\ \text{Il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = M. \end{cases}$$

2) Déterminer la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{2n}, \frac{-1}{2n+1}\right[.$$

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$. On définit deux suites par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et la relation de récurrence } R_n : \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

4) Montrer que ces deux suites admettent la même limite, notée $\mathcal{M}(a,b)$ (moyenne arithmético-géométrique).

5) Calculer $\mathcal{M}(0,b)$, $\mathcal{M}(a,0)$ et $\mathcal{M}(a,a)$.

6) Montrer que $a \leqslant \mathcal{M}(a,b) \leqslant b$ et $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{M}(a,b) \leqslant \frac{a+b}{2}$.

7) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathcal{M}(1,x)$.

a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}.$$

b) En déduire que f est continue en $x = 1$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 6. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{1-\frac{1}{x}} - x & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ -x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.