

ETUDE GEOMETRIQUE DES SYSTEMES LENTS-RAPIDES

Robert ROUSSARIE

Institut de Mathématique de Bourgogne, U.M.R. 5584 du C.N.R.S.

Université de Bourgogne, B.P. 47 870

21078 Dijon Cedex, France

E-mail: roussari@u-bourgogne.fr

1 Introduction aux systèmes lents-rapides

1.1 Quelques définitions

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ on considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (1)$$

où $\varepsilon \in (\mathbb{R}^+, 0)$ est un petit paramètre positif et λ est un autre paramètre dans $(\mathbb{R}^p, 0)$. Ce système est appelé *perturbation singulière* car pour $\varepsilon = 0$ la dimension du système, qui est égale à $n + q$ pour $\varepsilon \neq 0$, tombe à q . Plus précisément, si f est localement inversible en x , au voisinage de (x_0, y_0) vérifiant $f(x_0, y_0, \lambda) = 0$, on peut résoudre $x = x(y, \lambda)$ et pour $\varepsilon = 0$ le système se réduit à la *dynamique lente* :

$$\dot{y} = g(x(y, \lambda), y, \lambda) \quad (2)$$

Le temps t du système (1) est appelé *temps lent* (on a par exemple $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$). Pour $\varepsilon \neq 0$ on peut faire le changement de variable temps : $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Ce nouveau temps τ est appelé *temps rapide*. On a $x' = \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon \dot{x}$ et $y' = \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon \dot{y}$, ce qui fait que le système (1) est remplacé par le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \lambda) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (3)$$

Ce système est appelé *équation de relaxation*. Ce n'est plus un système singulier au sens précédent, mais seulement une (λ, ε) -famille de champs de vecteurs $X_{\lambda, \varepsilon}$ qui dégénère pour $\varepsilon = 0$ au sens où pour cette valeur le champs $X_{\lambda, 0}$ a une ensemble de zéros en général non-isolé donné par $\{f(x, y, \lambda) = 0\}$.

Le système lent-rapide est donné par l'une ou l'autre forme (1) ou (3). Nous travaillerons uniquement avec la présentation sous la forme d'équation de relaxation pour éviter le problème singulier, contrairement à l'approche faite dans

[BCDD] ou l'on donne un sens à la limite singulière dans le cadre de l'Analyse Non Standard.

Pour cette présentation nous allons nous limiter à $n = q = 1$. Dans ce cas, on a une dynamique du plan avec des récurrences triviales, d'après le Théorème de Poincaré-Bendixson: le seul élément d'intérêt de la dynamique est la considération de ses *cycles limites* (les orbites périodiques isolées). Il n'y a pas de tels cycles limites pour l'équation limite quand $\varepsilon = 0$. La dynamique de l'équation limite est très simple. On a un *ensemble critique* formé des zéros : $L_\lambda = \{f(x, y, \lambda) = 0\}$. En dehors de cet ensemble critique, les orbites sont régulières et horizontales (des segments ouverts de droite parallèles à l'axe des x). Ces orbites horizontales forment la *dynamique rapide*. La question principale est alors:

Comment les cycles limites bifurquent-ils de l'équation limite, c'est-à-dire lorsque ε passe de 0 à de petites valeurs non nulles? Peut-on calculer leur nombre et la façon dont ils se comportent (bifurquent) en fonction du paramètre λ , lorsque ε est fixé à une petite valeur positive?

Pour préciser cette question, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 1.1. Soit X_μ une famille de champ de vecteurs du plan avec $\mu \in P$, espace des paramètres. Un ensemble limite périodique (e.l.p. en abrégé) de X_μ pour la valeur $\mu_* \in P$, est un compact Γ invariant par X_{μ_*} avec la propriété suivante. Il existe une suite (μ_i) convergeant vers μ_* dans P et pour chaque μ_i un cycle limite γ_i du champ de vecteurs X_{μ_i} tels que la suite (γ_i) converge vers Γ au sens de Hausdorff.

Remarque 1.2. On rappelle que l'on définit une distance de Hausdorff d_H entre les compacts non vides d'un espace métrique (M, d) par:

$$d_H(K_1, K_2) = \text{Sup}\{\text{Sup}_{x \in K_1} d(x, K_2), \text{Sup}_{y \in K_2} d(y, K_1)\},$$

où, lorsque K est un compact non vide de M et $a \in M$, on définit la distance de a à K par

$$d(a, K) = \text{Inf}_{x \in K} d(a, x)$$

d_H est une distance sur l'ensemble $\mathcal{C}(M)$ des compacts non vides de M . Un résultat plus profond est que $(\mathcal{C}(M), d_H)$ est compact si (M, d) est compact.

Comprendre les bifurcations dans la famille X_μ est comprendre comment bifurquent les e.l.p. de la famille. Une première question est d'estimer le nombre de cycles limites qui apparaissent par bifurcation:

Définition 1.3. Soit Γ un e.l.p. de X_μ pour la valeur $\mu_* \in P$ supposé muni d'une distance d_P . pour tout $\delta > 0$, désignons par $N(\delta) \in \mathbb{N} \cup \infty$ le nombre de cycles limites γ de X_μ pour $d_P(\mu, \mu_*) < \delta$ et tels que $d_H(\gamma, \Gamma) < \delta$.

On définit la cyclicité de Γ dans la famille X_μ par :

$$\text{Cycl}(X_\mu, \Gamma) = \underline{\text{Lim}}\{N(\delta) \mid \delta \rightarrow 0\}$$

Une conjecture centrale pour les familles analytiques de champs de vecteurs du plan est de prouver que dans une telle famille tout e.l.p. est de *cyclicité finie*. Cette conjecture vaut également pour les équations de relaxation que nous considérons ici, si elles sont analytiques.

Définition 1.4. *Un cycle lent-rapide de (3) est un e.l.p. Γ pour $\varepsilon = 0$ (et une valeur quelconque de λ).*

Dorénavant, nous allons nous limiter aux systèmes lents-rapides de type Liénard. Ces systèmes sont représentés par des équations de relaxation de la forme

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} x' = y - F_\lambda(x) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (4)$$

On supposera que F, g sont des fonctions de classe C^∞ (dans la définition classique de Liénard, F, g sont des polynômes de x). L'ensemble critique L_λ pour l'équation de Liénard (4) est la courbe $L_\lambda = \{y = F_\lambda(x)\}$. pour cette raison, on l'appelle aussi *courbe lente*. Il est très facile de déduire du Théorème de Poincaré-Bendixson la caractérisation suivante des e.l.p. de (4) (voir [PR]):

Proposition 1.5. *Supposons que la fonction F_{λ_0} soit non constante avec un nombre finie d'oscillations : F_{λ_0} n'a qu'un nombre fini de points critiques formant l'ensemble C_{λ_0} . Alors un cycle lent-rapide pour la valeur λ_0 est soit un point de L_{λ_0} soit une courbe simple homéomorphe au cercle, formé de l'union d'un nombre finie de trajectoires horizontales de la dynamique rapide et d'un nombre fini d'arcs fermeture d'arcs de $L_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$ (voir Figure 1).*

Figure 1: Equation limite

Sous l'hypothèse de la Proposition, la dynamique lente est définie sur L_{λ_0} , en dehors des points critiques de F_{λ_0} . Nous montrerons plus loin la condition nécessaire suivante pour les cycle lents-rapides :

Lemme 1.6. *Chaque cycle lent-rapide pour la valeur λ_0 a une orientation compatible avec l'orientation définie par la dynamique lente sur les arcs de $L_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$ qu'il contient et avec l'orientation des orbites de la dynamique rapide qu'il contient.*

On peut illustrer cel sur l'exemple de l'équation de Van der Pol donnée par $F(x) = x^2 + x^3$ (il n'y a pas de paramètre λ). La Figure 2 montre les différents cycles lents-rapides pour cette équation.

Figure 2: Cycles Lents-rapides de l'équation de Van der Pol

1.2 Exemples de systèmes lents-rapides

1.2.1 Les circuits électriques

Cet exemple a été introduit et étudié par Van der Pol [VdP]. On considère un circuit formé par une condensateur de capacité C , une bobine d'inductance L et

une résistance avec une loi $R = f(i)$ non-linéaire (un résistor), disons quadratique. Le terme $\frac{LC}{R_{\text{moy}}}$ est très petit: c'est le paramètre ε . Après normalisation, l'équation différentielle sur la tension aux bornes du résistor prend la forme:

$$\varepsilon \ddot{x} + (x + x^2)\dot{x} + x - a = 0$$

On passe dans l'espace de phase: $(x, y = \dot{x})$. Le changement $(x, y) \rightarrow (x, Y = \varepsilon y)$ transforme le système en

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Y \\ \dot{Y} = a - x - \frac{Y}{\varepsilon}(x + x^2) \end{cases}$$

On opère maintenant la *transformation de Liénard*: $y = Y + F(x)$ avec

$$F(x) = \int_0^x (s + s^2)ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En passant au temps rapide, on obtient l'équation de Van der Pol :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x) \end{cases}$$

remarquer qu'en remplaçant x par $x - a$ on remplace la seconde ligne par $\dot{y} = -\varepsilon x$ et l'on introduit le paramètre a dans la première ligne. Plus généralement, Liénard, dans le même cadre de l'électrotechnique, a introduit des équations plus générales dites maintenant équation de Liénard :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, \lambda) \end{cases}$$

où F, g sont des polynômes. le cas classique correspond à $g = -x$.

1.2.2 Ecologie, biologie

On rencontre dans ces disciplines des systèmes avec des *échelles de temps différentes*. On considère par exemple en écologie deux populations de X et Y nombre d'individus, chacune divisée en sous-populations:

$$X = \sum X_i \text{ et } Y = \sum Y_j$$

Une dynamique s'établit globalement entre les populations X, Y . On a des dynamiques rapides entre les sous-populations de X et de Y respectivement (par exemple X et une population de proies et Y une population de prédateurs; X se divise entre une sous-population à l'abri X_1 et une sous-population à découvert X_2 ; l'échelle des échanges entre X et Y est l'année et celle entre X_1 et X_2 est le jour). Posons : $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$, $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)$. On peut modéliser le système écologique par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{X}_i = F_i^1(\underline{X}) + \varepsilon G^1(\underline{X}, \underline{Y}) \\ \dot{Y}_j = F_j^2(\underline{Y}) + \varepsilon G^2(\underline{X}, \underline{Y}) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de conservation $\sum F_i^1(\underline{X}) = 0$, $\sum F_i^2(\underline{Y}) = 0$, on peut éliminer les équations en X_1 et Y_1 au bénéfice des populations globales X, Y . Posons aussi $\tilde{X} = (X_2, \dots, X_k), \tilde{Y} = (Y_2, \dots, Y_l)$. On obtient le système lent-rapide suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \tilde{F}^1(\tilde{X}) + \varepsilon \tilde{G}^1(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{\tilde{Y}} = \tilde{F}^2(\tilde{Y}) + \varepsilon \tilde{G}^2(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{X} = \varepsilon f(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{Y} = \varepsilon g(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \end{cases}$$

En biologie moléculaire, les interaction entre gènes et protéines sont de type lent-rapide. Plus précisément, les changements dans les gènes sont lents (mutations,...). Par contre la production et l'évolution des protéines est rapide.

D'une manière générale beaucoup de systèmes naturels sont de type lent-rapide car ils couplent des milieux avec des échelles de temps très différentes: par exemple l'interaction atmosphère (dynamique rapide)-océan (dynamique lente), propagation de l'influx nerveux, mouvements cardiaques, etc... Evidement, une modélisation par équations différentielles ordinaires est en général très insuffisante mais peut servir de première approximation. Cette première approximation peut expliquer quelques traits importants de l'évolution.

1.2.3 Systèmes lents-rapides à la frontière des systèmes différentiels réguliers

Coinsidérons un système de Liénard classique et régulier (pas de type lent-rapide) et de degré impair $2n + 1$:

$$\mathcal{L}_a^n \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (5)$$

avec $F(x, a) = x^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$. La dynamique d'un tel système est très simple: on a à l'origine, un unique point singulier, qui est de type foyer. Le cercle à l'infini est répulsif, autrement dit il existe un grand disque dans \mathbb{R}^2 qui attire toutes les trajectoires (cel vient du fait que le terme principal de F est de degré impair avec un coefficient positif, et rend le système réaliste pour les applications). En fait il existe une application de Poincaré défini sur l'axe des y et pour cette application $+\infty$ est répulsif. Il en résulte que pour chaque $a \in \mathbb{R}^{2n+1}$, l'équation \mathcal{L}_a^n n'a qu'un nombre fini de cycles limites. On peut facilement montrer plus: pour chaque $K \in \mathbb{R}^+$, il existe un borne finie $L(n, K)$ pour le nombre des cycles limites des équations \mathcal{L}_a^n dès que $\|a\| \leq K$. Une question importante est la suivante : *Que peut-on dire de \mathcal{L}_a^n lorsque $\|a\| \rightarrow +\infty$?* Une conjecture de S. Smale (l'un des problèmes qu'il a posé pour ce siècle) est qu'il existe un $L(n)$ fini qui majore $L(n, K)$ pour tout K , c'est-à-dire qui est valable pour tout \mathcal{L}_a^n (plus précisément Smale conjecture que l'on peut trouver C, k , tel que $L(n) = Cn^k$).

Une façon d'aborder la question de l'*existence* d'un $L(n) < +\infty$ est la suivante. On considère le système élargi :

$$\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (6)$$

Evidemment, on a que $\mathcal{L}_a^n = \mathcal{S}_{a,1}^n$. Le système $\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n$ est quasi-homogène au sens suivant. Pour tout $\tau > 0$, on considère le difféomorphisme de l'espace de phase

$$T_\tau : x = \tau \bar{x}, \quad y = \tau^{2n+1} \bar{y},$$

et le changement de paramétrage :

$$U_\tau : a_i = \tau^{2n+1-i} \bar{a}_i, \quad \varepsilon = \tau^{4n} \bar{\varepsilon}.$$

alors T_τ conjugue les systèmes $\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n$ et $\tau^{2n} \mathcal{S}_{\bar{a},\bar{\varepsilon}}^n$. D'autre part, U_τ est un groupe à 1-paramètre linéaire dans l'espace (a, ε) dont les trajectoires hors $0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$ tendent vers 0 pour $\tau \rightarrow -\infty$ et vers l'infini pour $\tau \rightarrow +\infty$.

Le plan $\{\varepsilon = 1\}$ dans l'espace des paramètres (a, ε) coupe transversalement chaque trajectoire du groupe U_τ située en dehors du plan $\{\varepsilon = 0\}$ en un point et un seul. Ainsi l'espace des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n est en bijection avec l'espace des U_τ -trajectoires situées dans le demi-espace ouvert $\{\varepsilon > 0\}$.

Figure 3: Les trajectoires de U_τ

L'espace des U_τ -trajectoires situées dans le demi-espace fermé $\{\varepsilon \geq 0\}$ peut être considéré comme la fermeture de l'espace de équations de Liénard \mathcal{L}_a^n . Cet espace, qui contient un représentant de chaque élément dans $\{\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n \mid \varepsilon \geq 0\}$, est homéomorphe à la demi-sphère fermée $\{\|a\|^2 + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \geq 0\}$ qui coupe chacune des U_τ -orbites de $\{\varepsilon \geq 0\}$ en un point et un seul. Le bord de cet espace est la sphère $\{\|a\|^2 = 1, \varepsilon = 0\}$ et son intérieur s'identifie donc à l'espace des équations de Liénard : autrement dit, l'espace des U_τ -orbites dans $\{\varepsilon \geq 0\}$ est une compactification de l'espace des équations de Liénard. Il est commode de remplacer la demi-sphère $\{\|a\|^2 + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \geq 0\}$ par la demi-sphère topologique :

$$\Sigma = \Delta \times \{\varepsilon_0\} \cup \partial\Delta \times [0, \varepsilon_0],$$

où $\Delta = \{a \mid \|a\| = 1\}$ et $\varepsilon_0 > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. Le cylindre $\partial\Delta \times [0, \varepsilon_0]$ est un voisinage du bord $\partial\Delta \times \{0\}$ de Σ . Il devient arbitrairement proche de ce bord quand $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. D'autre part, si $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, on voit que le complémentaire de ce cylindre : $\Delta \times \{\varepsilon_0\}$, est en bijection avec l'ensemble des équation \mathcal{L}_a^n pour $\|a\| \geq K(\varepsilon_0)$ avec un $K(\varepsilon_0) \rightarrow +\infty$ lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

Figure 4: La compactification de l'espace \mathcal{L}_a^n

En conséquence, on voit que Σ est une compactification de l'espace des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n . Le bord de cet espace s'identifie avec les équations limites ($\varepsilon = 0$) du système lent-rapide :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (7)$$

avec $\|a\| = 1$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, où $\varepsilon_0 > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

Une conséquence de cette compactification est que pour montrer qu'il existe une borne finie $L(n)$ au nombre des cycles limites des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n , il suffit de montrer que chaque cycle lent-rapide du système (7) a une cyclicité finie [R?].

2 Outils géométriques

On se limite aux systèmes lents-rapides de type Liénard :

$$X_{\lambda, \varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (8)$$

où F, g sont des fonctions \mathcal{C}^∞ .

2.1 Modèle local près des points réguliers de la courbe lente

2.1.1 La courbe lente

Rappelons que la courbe lente, pour la valeur λ du paramètre est définie par $L_\lambda : \{y = F(x, \lambda) = F_\lambda(x)\}$. Elle est formée des points singuliers de l'équation limite $X_{\lambda, 0}$. En dehors de la courbe lente les orbites sont des arcs ouverts horizontaux (dynamique rapide). On appelle *point de contact* tout point de la forme

$$\{(x, F_\lambda(x)) \mid \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0\},$$

autrement dit les points de L_λ correspondant aux points singuliers de F_λ (points où la courbe lente a un contact avec la direction horizontale de la dynamique rapide). Nous désignerons par C_λ l'ensemble des points de contact pour la valeur λ . Un point de contact $(x_0, y_0 = F_\lambda(x_0))$ est de l'un des deux types suivants:

1. *Point de saut* si $g(x_0, y_0, \lambda) \neq 0$,
2. *Point tournant* si $g(x_0, y_0, \lambda) = 0$.

Considérons un point $(x, y) \in L_\lambda$. La différentielle de $X_{\lambda, 0}$ est donnée par :

$$DX_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En conséquence les valeurs propres de cette différentielle sont égales à 0 (avec pour direction propre la direction tangente à L_λ) et à $-\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}$ (avec pour direction propre la direction horizontale).

Supposons que $(x, y) \in L_\lambda$ ne soit pas un point de contact. On dira que c'est un *point régulier* de la courbe lente. Alors ce point est un *point normalement*

hyperbolique de L_λ et $L_\lambda - C_\lambda$ est une union d'arcs normalement hyperboliques, attractants si $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} > 0$ et répulsifs si $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} < 0$ (voir Figure 5).

Figure 5: Arcs normalement hyperboliques de la courbe lente

Pour une valeur de λ fixée, l'espace central à un point de $L_\lambda - C_\lambda$ est la direction tangente au graphe. En un point de contact, l'espace central est \mathbb{R}^2 .

2.1.2 Variétés centrales aux points réguliers

Pour chaque λ fixé, on va considérer $X_{\lambda,\varepsilon}$ comme un champ de vecteurs \mathcal{X}_λ de \mathbb{R}^3 d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\lambda(x) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Soit $[a, b] \subset \text{Ox}$ tel que $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Désignons par $L_\lambda[a, b]$ le graphe de F_λ au-dessus de $[a, b]$. C'est un arc de points réguliers. Chacun de ces points est normalement hyperbolique pour \mathcal{X}_λ , en dimension 3 (et pas seulement pour $X_{\lambda,\varepsilon}$ en dimension 2). En un tel point $(x, y, 0) \in L_\lambda[a, b]$, on a :

1. une valeur propre non nulle: $-\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x)$ avec l'axe des x comme direction propre hyperbolique,
2. deux valeurs propres nulles avec comme espace propre central la somme directe: $O\varepsilon \oplus T_{(x,y,0)}L_\lambda$ ($T_{(x,y,0)}L_\lambda$ est la droite tangente à L_λ , considérée comme courbe de \mathbb{R}^3).

On peut alors appliquer la Théorie des variétés invariantes de Fenichel ([F]; voir aussi [HPS]). Dans notre cas on peut énoncer le résultat de la façon suivante

Théorème 2.1. (Fenichel) *Soit $[a, b]$ comme ci-dessus et soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Il existe un plongement $\Phi_\lambda(x, \varepsilon) = (\phi_\lambda(x, \varepsilon), \varepsilon)$, de classe \mathcal{C}^k du rectangle $[a, b] \times [0, \varepsilon_k]$ dans \mathbb{R}^3 (ε_k dépendant de k), transverse à $\{\varepsilon = 0\}$. Si on pose $W_\lambda[a, b] = \Phi_\lambda([a, b] \times [0, \varepsilon_k])$, ce plongement est tel que :*

1. $W_\lambda[a, b] \cap \{\varepsilon = 0\} = L_\lambda[a, b]$
2. $X_{\lambda,\varepsilon}$ est tangent à $W_\lambda[a, b]$ en chaque point (on dit que $W_\lambda[a, b]$ est une variété (invariante) centrale le long de $L_\lambda[a, b]$).

Remarque 2.2. 1. La variété centrale $W_\lambda[a, b]$ dépend de façon \mathcal{C}^k de λ au sens que l'application $\phi_\lambda(x, \varepsilon)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^k de $(x, \lambda, \varepsilon)$. Cela découle en fait du Théorème de Fenichel lui-même, qu'il suffit d'appliquer au champ de vecteurs de \mathbb{R}^{3+p} dont l'équation différentielle est obtenue en ajoutant $\dot{\lambda} = 0$ au système (9). On obtient alors une variété centrale $W[a, b]$ de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^{3+p} . La variété centrale à paramètre $W_\lambda[a, b]$ est obtenue en intersectant $W[a, b]$ par les espaces $\{\lambda = \text{Cste}\}$.

2. On peut choisir k arbitrairement grand. Evidemment $\varepsilon_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$. Une remarque importante est que les différentes variétés centrale obtenues en fonction de k ne coïncident pas en général. Par contre si on considère deux variétés centrales $W_\lambda^{k_1}[a, b]$ et $W_\lambda^{k_2}[a, b]$ de classe $k_1 \leq k_2$ respectivement, ces deux variétés ont un contact de classe k_1 le long de $L_\lambda[a, b]$. Cela implique qu'il existe une variété centrale formelle unique donnée $\hat{W}_\lambda[a, b]$ par une série formelle unique: $\hat{\phi}_\lambda(x, \varepsilon) = \sum_i \phi_\lambda^i(x) \varepsilon^i$, avec des fonctions \mathcal{C}^∞ , $\phi_\lambda^i(x)$, qui donne les développements de Taylor d'ordre fini de chaque fonction $\phi_\lambda(x, \varepsilon)$.

L'intérêt de l'existence des variétés centrales est de préciser quelles sont les conditions initiales qui contraignent le flot de $X_{\lambda, \varepsilon}$ à rester près de $L_\lambda[a, b]$ pour ε petit. Précisément, pour ε assez petit, la variété $W_\lambda[a, b]$ coupe le plan $\mathbb{R}^2 \times \{\varepsilon\}$ transversalement le long d'une courbe invariante: pour une condition initiale sur cette courbe, le flot y reste contenu.

2.1.3 Modèle local le long de $L_\lambda[a, b]$

Choisissons une variété centrale $W_\lambda[a, b]$ de classe \mathcal{C}^{k+3} à préciser plus tard. On utilise cette variété pour choisir de nouvelles coordonnées (X, Y) de classe \mathcal{C}^{k+3} telles que $W_\lambda[a, b]$ soit définie par $\{Y = 0\}$. L'équation de $X_{\lambda, \varepsilon}$ prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon U(X, Y, \lambda, \varepsilon) + YZ(X, Y, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = YV(X, Y, \lambda, \varepsilon), \end{cases} \quad (10)$$

Les fonctions U, V, Z sont de classe \mathcal{C}^k . En fait, le changement de coordonnées \mathcal{C}^{k+3} transporte $X_{\lambda, \varepsilon}$ en un champ de classe \mathcal{C}^{k+2} , que l'on continuera de noter $X_{\lambda, \varepsilon}$ par abus d'écriture; comme la fonction V est obtenue par division par Y , elle est seulement de classe \mathcal{C}^{k+1} . Même remarque pour la fonction Z qui est aussi de classe \mathcal{C}^{k+1} , car obtenue par division par Y . La fonction U est obtenue à partir d'une fonction \mathcal{C}^{k+1} par division par ε . elle est donc de classe \mathcal{C}^{k+1} .

Remarquez que la seconde composante de (10) est divisible par Y car on a choisi que $\{Y = 0\}$ soit la variété invariante $W_\lambda[a, b]$. On peut supposer que $x \equiv X$. On a alors $[a, b] \subset OX$ et on conservera la notation $W_\lambda[a, b]$ pour la variété centrale qui est contenue dans $\{Y = 0\}$. L'hyperbolicité normale se traduit par $V(X, 0, \lambda, 0) \neq 0$ pour tout $X \in [a, b]$ et tout λ . La forme particulière de la première composante traduit le fait que pour $Y = 0$, elle est divisible par ε , puisque $L_\lambda[a, b]$ est une ligne de zéros.

Nous allons maintenant améliorer l'écriture (10) en utilisant le résultat de Takens sur les champs de vecteurs partiellement hyperboliques [T1]. Par rapport aux hypothèses très générales du résultat de Takens nous avons deux grandes simplifications :

1. La dimension normalement hyperbolique est égale à 1. Les hypothèses de *non-résonance* sont trivialement vérifiées.
2. On se place au voisinage d'une singularité (ici au voisinage de $\varepsilon = 0$) de la variété centrale considérée.

Nous allons énoncer une version du Théorème de Takens sous ces hypothèses simplificatrices :

Théoreme 2.3. *Considérons un système différentiel tel que (10) avec U, V, Z de classe \mathcal{C}^k . Il existe $K(k) \ll k$ qui tend vers $+\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$ et un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^{K(k)+2}$:*

$$(X, Y, \lambda, \varepsilon) \rightarrow (\tilde{X}(X, Y, \lambda, \varepsilon), Y\tilde{Y}(X, Y, \lambda, \varepsilon), \lambda, \varepsilon)$$

qui transporte sur un voisinage de $L_\lambda[a, b]$, l'équation (10) de $X_{\lambda, \varepsilon}$ sur l'équation, dite forme normale de Takens :

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon \tilde{g}(X, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = V(X, \lambda, \varepsilon)Y \end{cases} \quad (11)$$

où \tilde{g}, V sont de classe $\mathcal{C}^{K(k)}$.

On peut considérer que X est la variable initiale x . L'interprétation de la forme normale de Takens est que l'on a linéarisé la composante normale et de plus que l'on a séparé la dynamique centale (première composante). Pour $\varepsilon = 0$, la fonction $V(x, \lambda, 0)$ est la valeur propre transverse. On a donc:

$$V(x, \lambda, 0) = -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \quad (12)$$

D'autre part, la première composante de (11), après division par ε et pour $\varepsilon = 0$, est égale à la dynamique lente (2), exprimée dans la variable x . Explicitement, on a:

$$\dot{x} = \tilde{g}(X, \lambda, 0) = \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}\right)^{-1} g(x, F_\lambda(x), \lambda) \quad (13)$$

Finallement, comme $V(x, \lambda, 0) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout λ on peut diviser l'équation différentielle (11) par la valeur absolue de cette fonction (dans une équivalence, on veut préserver le sens des trajectoires). On obtient

Corollaire 2.4. *A quivalence de classe $\mathcal{C}^{K(k)+2}$ près, l'équation (10) s'écrit sur un voisinage de $L_\lambda[a, b]$:*

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon G(X, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = \pm Y \end{cases} \quad (14)$$

où G est de classe $\mathcal{C}^{K(k)}$. Le signe \pm dépend du caractère attractif ou bien répulsif de l'arc $L_\lambda[a, b]$.

2.1.4 Le cas d'une dynamique lente sans singularités

Supposons que tout $x \in [a, b]$ soit un point régulier de la dynamique lente, c'est-à-dire d'après (13), que $g(x, F_\lambda(x), \lambda) \neq 0$ et donc que $G(X, \lambda) \neq 0$ dans (14). On peut alors conjuguer la famille de champs $\mathcal{C}^{K(k)}$ unidimensionnel $G(X, \lambda) \frac{\partial}{\partial X}$ au champ constant $\frac{\partial}{\partial X}$ (par une famille de difféomorphismes $\mathcal{C}^{K(k)}$) :

Proposition 2.5. *Supposons que $g(x, F_\lambda(x), \lambda) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout λ . Alors, au voisinage de $L_\lambda[a, b]$, le champ $X_{\lambda, \varepsilon}$ est équivalent en classe $\mathcal{C}^{K(k)}$ à :*

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon \\ \dot{Y} = \pm Y \end{cases} \quad (15)$$

La proposition précédente nous dit que le champ (15) est un modèle en classe \mathcal{C}^K quelque soit K , à priori dans des voisinages de plus en plus petits lorsque $K \rightarrow +\infty$.

On se place dans les coordonnées (X, Y) données par la Proposition 2.5. On peut supposer que ces coordonnées sont définies pour $(X, Y) \in [a - \eta, b + \eta] \times [-2, 2]$ pour un certain $\eta > 0$. Il est évidemment trivial d'intégrer l'équation (15). Choisissons des valeurs $X_1, X_2 \in [a, b]$ avec $X_1 < X_2$. On considère la section Σ donnée par $\Sigma = \{(X, \varepsilon) \in [X_1, X_2] \times [0, \varepsilon_0], Y = 1\}$. Cette section est transverse au champ. La trajectoire par un point $(X, \varepsilon) \in \Sigma$ est donnée par :

$$X(t, X, \varepsilon) = \varepsilon t + X, \quad Y(t) = e^{-t}$$

Considérons maintenant une section de sortie \mathcal{T} paramétrée par (Y, ε) à une hauteur $X > X_1$ avec $X < b + \eta$. Le temps d'arrivée sur cette section à partir du point $(X, \varepsilon) \in \Sigma$ est égal à $t_T = \frac{X_1 - X}{\varepsilon}$. L'application de transition $T : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$ est égale à :

$$\begin{cases} Y = e^{-\frac{X_1 - X}{\varepsilon}} \\ \varepsilon = \varepsilon \end{cases} \quad (16)$$

Comme $X_1 - X > 0$, le rectangle Σ est envoyé sur un secteur $T(\Sigma)$ exponentiellement plat pour $\varepsilon = 0$ (voir Figure 6)

Figure 6: Image d'une section

La saturation de tout segment $\{X = X_0\}$ avec $X_1 \leq X_0 \leq X_2$ contient une variété centrale le long de $L_\lambda[X_0, X_2]$ qui est \mathcal{C}^∞ sauf en $(X_0, 0)$ dans les coordonnées (X, Y) et donc \mathcal{C}^K dans les coordonnées initiales. Si X varie dans $[X_1, X_2]$ on obtient un feuilletage par variétés centrales dont les feuilles ont un contact plat le long de la courbe lente.

2.2 Eclatement des points de contact.

Dans le dernier paragraphe on a construit des variétés centrales au voisinage de tout point régulier de courbe lente, c'est-à-dire d'un point qui n'est pas un point de contact. Ces variétés sont très utiles pour comprendre la dynamique locales au voisinage des points réguliers dans le cadre de ce qui est appelée la Théorie géométriques des équations de relaxation [J]. Considérons maintenant un arc attractant de la courbe lente entre deux points de contact p_λ et q_λ . Soit a_λ un point intermédiaire et supposons que la dynamique lente soit sans point singulier sur l'intervalle $[a_\lambda, p_\lambda[$, la dynamique lente allant de a_λ vers p_λ . En utilisant le modèle local 2.5 en chaque point de $[a_\lambda, p_\lambda[$, on peut construire des

variétés centrales tout le long de l'arc semi-ouvert $[a_\lambda, p_\lambda[$ (voir Figure 7). *Peut-on prolonger cette variété au delà du point p_λ ?* Nous allons pouvoir répondre grâce à la technique de l'éclatement.

Figure 7: Image d'une section

2.2.1 Formules d'éclatement

L'éclatement le plus simple est défini en dimension 2. Il consiste tout simplement à relever en coordonnées polaires un champ de vecteurs qui s'annule à l'origine. On dit encore que *l'on éclate l'origine*. L'intérêt est que l'on remplace l'origine par tout un cercle (le diviseur de l'éclatement D) dont les points correspondent aux directions de droites orientées passant par l'origine. Dans cet espace augmenté on a la place pour donner plus d'information: par exemple si une courbe γ a un point double à l'origine avec deux branches de directions différentes, la courbe éclatée n'aura que des points simples et passera par plusieurs points de D correspondant aux différentes directions orientées des tangentes de γ à l'origine.

Nous allons utiliser un éclatement plus général : d'une part on éclate l'origine d'un espace \mathbb{R}^n avec $n > 2$ en général, car on veut éclater des familles de champs de \mathbb{R}^2 et pas seulement un champ individuel; d'autre part on veut introduire des poids différents sur les coordonnées de \mathbb{R}^n de façon à tenir compte d'une éventuelle quasi-homogénéité de la famille à l'origine.

Définition 2.6. *On appellera éclatement de l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ de système de poids $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, l'application $: S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\Pi : (p_1, \dots, p_n; \rho) \rightarrow (\rho^{a_1} p_1, \dots, \rho^{a_n} p_n) \quad (17)$$

où $(p_1, \dots, p_n) \in S^{n-1} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|p_1\|^2 + \dots + \|p_n\|^2 = 1\}$ (la sphère de dimension $n - 1$). La sphère $D = S^{n-1} \times \{0\}$ s'appelle le diviseur de l'éclatement.

Dans la pratique on recouvre l'espace éclaté $E = S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ par des cartes. Par exemple, on peut utiliser les $2n$ cartes $\mathcal{U}_i^\pm = U_i^\pm \times \mathbb{R}^+$, $i = 1, \dots, n$ où U_i^\pm est une carte de S^{n-1} de coordonnées $(p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ (on saute la coordonnée p_i).

On peut définir l'application Π_i^\pm d'éclatement sur la carte \mathcal{U}_i^\pm par la même formule (17) que Π . En choisissant une application de carte $\rho_i^\pm : \mathcal{U}_i^\pm \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ convenable, on aura :

$$\Pi_i^\pm = \Pi \circ \rho_i^\pm$$

A une certaine puissance de ρ près (puissance dépendant des poids et du champ considéré) on peut relever tout champ de vecteurs défini au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ en un champ défini au voisinage du diviseur :

Lemme 2.7. *Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ , quelconque, défini au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et Π une application d'éclatement quelconque. Soit $\hat{X} = \Pi^{-1}$ défini en dehors de D . Alors il existe un $\delta \in \mathbb{Z}$ minimal, tel que $\bar{X} = \rho^\delta \hat{X}$ s'étende de façon C^∞ sur D .*

Remarque 2.8. 1. Dans le cas "classique", on a $a_i = 1, i = 1, \dots, n$ et $X(0) = 0$ on a que $\delta < 0$. Par exemple, si la partie linéaire X n'est pas nulle, on a $\delta = -2$. En général, δ peut avoir un signe quelconque. Par exemple, si on éclate de façon classique ($a_i = 1$) un champ non nul en 0 (ce qui est possible mais pas très utile!) on aura $\delta = 2$.

2. La démonstration du Lemme 2.7 est complètement similaire à celle du cas classique que l'on pourra trouver dans [T2].

3. Le fait que δ est minimal fait que \bar{X} n'est pas identiquement nul le long de D . Si l'on considère un $\tau \in \mathbb{Z}$ avec $\tau > \delta$, alors $\rho^\tau \bar{X}$ s'annule identiquement le long de D et est donc plus dégénéré que \bar{X} .

2.2.2 Eclatement global des familles

On considère maintenant une famille locale de champs de vecteurs de \mathbb{R}^2 ,

$$X_\lambda(x, y) = P(x, y, \delta) \frac{\delta}{\delta x} + Q(x, y, \delta) \frac{\delta}{\delta y}$$

de classe \mathcal{C}^∞ , définie au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$ pour un paramètre $\lambda \in (\mathbb{R}^p, 0)$, au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p$. On va le considérer comme un champ X de \mathbb{R}^{p+2} d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, \lambda) \\ \dot{y} = Q(x, y, \lambda) \\ \dot{\lambda} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

On peut alors éclater l'origine de \mathbb{R}^{p+2} comme il a été expliqué plus haut avec $n = p + 2$ et on obtiendra un champ de vecteurs éclaté \bar{X} . Le choix des poids sera fait en fonction de la famille. on verra plus bas le cas particulier des points de contact des systèmes lents-rapides. Comme le champ X est particulier, on a aussi quelques propriétés remarquables du champ éclaté :

1. On peut considérer que X est un champ tangent aux fibres de la fibration, projection sur le paramètre $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dont les fibres sont données par $\{\lambda = \text{Const.}\}$. Le champs éclaté est tangent à la *fibration singulière* définie par les mêmes équations $\{\lambda \circ \Pi = \text{Const.}\}$ d'espace total $E = S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$. La fibre singulière est égale à $S^{n-1} \times \{0\} \cup S^1 \times \mathbb{R}^+$, le cercle $S^1 \times \mathbb{R}^+$ tant l'éclatement de \mathbb{R}^2 à l'origine (voir Figure 8).

2. Il est naturel de garder trace du fait que les coordonnées globales de \mathbb{R}^n se séparent en deux groupes : les coordonnées de phase (x, y) et les paramètres λ . Pour cel, on remplace la sphère S^{n-1} par la sphère topologique $S^1 \times D^p \cup D^2 \times S^{p-1}$ (le bord de $D^2 \times D^p$ qui est homéomorphe au disque D^{p+2}). On distingue ainsi deux directions : la *direction de phase* correspondant au domaine W_{PH} défini par $(\bar{x}, \bar{y}) \in S^1, \bar{\lambda} \in D^p$ et $\rho \in [0, \rho_0[$; la *direction du paramètre* correspondant au domaine W_P défini par $(\bar{x}, \bar{y}) \in D^2, \bar{\lambda} \in S^{p-1}$ et $\rho \in [0, \rho_0[$. Chacun de ces domaines pourra être recouvert par plusieurs cartes obtenues en choisissant des cartes de

S^1 et de S^{p-1} . Remarquons que la région W_{Ph} contient l'éclatement du champ non éclaté X_0 que l'on a avec $\bar{\lambda} = 0$. dans la région W_P le champ éclaté est en fait équivalent à une famille de champs de vecteurs sur le disque D^2 avec un paramètre $\bar{\lambda} \in S^{p-1}$ (voir Figure 8)

3. Il est possible de prendre des disque D^2, D^p de rayon variable. Par exemple, si le rayon du disque D^2 augmente, on recouvre tout le plan \mathbb{R}^2 de coordonnées (\bar{x}, \bar{y}) est la limite est une compactification de cet espace: on rajoute alors un bord à \mathbb{R}^2 qui est précisément le cercle $S^1 \times \{0\}$ que l'on trouve dans le domaine W_{PH} . Ce cercle se trouve être le diviseur de l'éclatement de X_0 (voir Figure 9).

Figure 8: La fibration singulière

Figure 9: Les directions d'éclatement

2.2.3 Eclatement d'un point de saut quadratique

On considère un point de saut d'une équation (8) avec un contact quadratique (entre la courbe lente et la direction horizontale). On suppose que ce point est en $(0, 0)$ pour tout λ (l'existence d'un contact quadratique est une condition stable). Cela signifie que $F(0, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, \lambda) = 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, \lambda) \neq 0$. En changeant x, y, ε par homothéties on peut écrire l'équation (8) :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2 + O(x^2) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Figure 10: Point de saut quadratique

Dire que le point $(0, 0)$ est un point de saut signifie que $g(0, 0, \lambda) \neq 0$. Pour respecter la quasi-homogénéité, de la partie principale de l'équation (termes y, x^2, ε), il est naturel de choisir pour formule d'éclatement :

$$x = \rho \bar{x}, \quad y = \rho^2 \bar{y}, \quad \varepsilon = \rho^3 \bar{\varepsilon} \quad (20)$$

Remarquez que l'on n'éclate pas le paramètre λ . Cel revient à éclater, non pas un point, mais l'espace de codimension 3 : $\{x = y = \varepsilon = 0\} \subset \mathbb{R}^{p+3}$. Ecrivons maintenant le champ éclaté.

1. (1) *Dans la direction de phase* on prend $\bar{x} = \cos \theta = c, \bar{y} = \sin \theta = s$

On a :

$$\hat{X} : \begin{cases} (c^2 + 2s^2)\dot{\rho} = \rho^2 (c(s + c^2) + O(\rho)) \\ (c^2 + 2s^2)\rho\dot{\theta} = -2\rho^2 s (s(s + c^2) + O(\rho)) \\ \dot{\varepsilon} = 3\bar{\varepsilon}\dot{\rho} + \rho^3\dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

On peut, à équivalence près, diviser le champ \hat{X} par la fonction positive $c^2 + 2s^2$. Après cette division, le champ éclaté : $\bar{X} = \frac{1}{\rho}\hat{X}$ a pour équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho c(s + c^2) + O(\rho^2) \\ \dot{\theta} = -2s(s + c^2) + O(\rho) \\ \dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{\rho}}{\rho}\bar{\varepsilon} = -3\left(c(s + c^2) + O(\rho)\right)\bar{\varepsilon} \end{cases} \quad (22)$$

Dans $\{\bar{\varepsilon} = 0\}$ on retrouve l'éclatement \bar{X}_0 du champ X_0 (restriction à $\varepsilon = 0$). On a 4 points singuliers pour ce champ, situés sur le diviseur, en $\theta = 0, \pi, \theta_0, \pi - \theta_0$ où θ_0 est la racine entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 de l'équation : $\sin \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 0$. Ces 4 points sont des zéros simples du champ X_0 restreint au diviseur. Les deux premiers s_1, s_2 sont l'aboutissement des relevés de 2 trajectoires horizontales arrivant en partant du point de saut. Les 2 autres l_1, l_2 sont l'aboutissement des arcs de la courbe lente arrivant au point de saut (voir Figure).

Figure 11: Eclatement pour $\varepsilon = 0$

On peut maintenant passer en dimension trois, dans le domaine W_{PH} , voisinage du diviseur S^1 , de coordonnées $\theta \in S^1$, et $\rho, \bar{\varepsilon}$ proches de 0. Le diviseur S^1 de \bar{X}_0 est le bord du diviseur S^2_+ du champ éclaté \bar{X} . Dans la Figure 12 on l'a représenté comme un dôme se recollant le long de S^1 au sol horizontal, qui est l'espace éclaté (difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^+$) de l'espace de phase \mathbb{R}^2 . La réunion des deux est la fibre singulière au-dessus de $\varepsilon = 0$.

Figure 12: Domaine W_{PH}

Les points s_1, s_2 sont des points de selle hyperboliques en dimension 3. Cel suit trivialement de (22). Par contre les points l_1, l_2 sont semi-hyperboliques avec 2 valeurs propres nulles.

2. Dans la direction du paramètre ε , on prend $\bar{\varepsilon} = 1$ et (\bar{x}, \bar{y}) dans un disque \bar{D} arbitrairement grand. Le champ éclaté dans ce domaine W_P de coordonnées (\bar{x}, \bar{y}, ρ) est une famille de paramètre (ρ, λ) et a pour équation :

$$\bar{X} \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} + \bar{x}^2 + O(\rho) \\ \dot{\bar{y}} = g(0, 0, \lambda) + O(\rho) \end{cases} \quad (23)$$

Comme $g(0, 0, \lambda) \neq 0$ on a pas de singularité dans \bar{D} si ρ est assez petit. Les trajectoires coupent transversalement les lignes horizontales.

Les points l_1, l_2 sont semi-hyperboliques en restriction à $\rho = 0$, c'est à dire sur S^2_+ . Sur cet espace, ces points ont une variété centrale de dimension 1 et on peut calculer que la restriction à la variété centrale (paramétrée par $\bar{\varepsilon}$ est de la forme : $\dot{\bar{\varepsilon}} = k\bar{\varepsilon}^2 + O(\bar{\varepsilon}^3)$ où k est du signe de $g(0, 0, \lambda)$. Avec ce renseignement on peut reconstituer le portrait de phase de \bar{X} sur S^2_+ (voir Figure 13).

Figure 13: Le champ éclaté sur S_+^2

Finallement, à l'aide de ce portrait de phase, des propriétés des variétés centrales et des modèles locaux introduits plus haut, on peut comprendre la dynamique au voisinage du point de saut. On va supposer par exemple que $g(0, 0, \lambda) > 0$. Dans ce cas la séparatrice centrale σ issue du point l_1 aboutit au point de selle s_2 (voir Figure 13).

Considérons par exemple une section $\Sigma \subset \{x = x_1\}$ paramétrée par $(y, \varepsilon) \in [y_1, y_2] \times [0, \varepsilon_0]$; on choisit x_1, y_1, y_2 de façon que $\{x_1\} \times [y_1, y_2]$ soit en-dessous de la courbe lente, dans notre domaine d'étude. Considérons les trajectoires issues de Σ . Elles vont couper chaque plan $\{y = \text{Const.} < 0\}$ selon un secteur T_y de pointe exponentiellement plate basée sur la courbe lente. Pour comprendre le passage au voisinage du point de saut, on considère le champ éclaté (et l'on relève T_y dans l'espace éclaté). En utilisant le modèle local de Takens au voisinage du point l_1 , il est facile de voir que les trajectoires issues d'un secteur T_y (choisi dans la carte du modèle) "quitte" le voisinage du point l_1 à travers un secteur T' de pointe exponentiellement plate basée sur la séparatrice σ et transverse au diviseur S_+^2 . En suivant les trajectoire de \bar{X} , on arrive à un secteur T'' proche de s_2 , avec les mêmes propriétés. On doit maintenant examiner le passage au voisinage du point de selle s_2 . Paradoxalement, c'est plus difficile à étudier que le passage près du point plus dégénéré l_1 à cause de possibles résonances entre les valeurs propres (et la théorie de Takens n'est ici d'aucune utilité). Le résultat est que l'on quitte le voisinage de s_2 à travers un secteur $T = T_x$ basée en un point $(x, 0)$ avec $x > 0$, de l'orbite rapide γ_+ issue du point de saut. Ce secteur est exponentiellement plat le long d'une courbe aboutissant en $(x, 0)$. Cette n'est plus différentiable en ce point mais elle reste topologiquement transverse au plan $\{\varepsilon = 0\}$.

En conclusion, on voit que toutes les orbites issues de Σ quitte le point de saut à travers un secteur T exponentiellement plat en ε , c'est-à-dire que l'on sort dans un intervalle de largeur plus petite que $e^{-\frac{K}{\varepsilon}}$ pour une certaine constante $K > 0$. Cet intervalle tend vers la trajectoire rapide γ_+ quand $\varepsilon \rightarrow 0$: d'où le nom de point de saut donné au point $(0, 0)$ (voir Figure 14).

Figure 14: Passage du point de saut

2.2.4 Bifurcation des cycles lents-rapides communs

Nous allons appliquer l'étude du passage des points de saut pour étudier les bifurcations des cycles lents-rapides les plus simples, appelés cycles lents-rapides communs.

Définition 2.9. *Un cycle lent-rapide est de type commun aux conditions suivantes :*

1. *Il ne contient pas de point singulier de la dynamique lente.*
2. *Il ne contient que des arcs de la courbe lente de même nature (tous attractifs ou tous répulsifs).*

3. Les points de contact qu'il contient sont tous quadratiques et de type saut et sont situés à des valeurs différentes de y .

On dit que le cycle est attractif ou répulsif selon que les arcs qu'il contient sont attractifs ou répulsifs.

Figure 15: Cycle lent-rapide commun

Proposition 2.10. *Un cycle lent-rapide commun attractif (respectivement répulsif) bifurque pour $\varepsilon > 0$ en produisant un cycle limite hyperbolique attractif (respectivement répulsif).*

Preuve

Supposons que le cycle commun γ soit attractif (s'il est répulsif, il suffit de renverser le sens du temps). Chaque arc contenu dans γ part d'un point régulier de la courbe lente pour arriver à un point de saut. Ces arcs sont séparés le long de γ par des orbites régulières rapides. Notons par L_1, \dots, L_k les différents arcs de la courbe lente rencontrés, et R_1, \dots, R_k les orbites régulières. Choisissons des sections $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ transverses à chacune de ces orbites régulières. Nous allons considérer l'application de retour sur Σ_1 (pour les $\varepsilon > 0$). Cette application est composée des transitions : $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ (avec $k+1 \sim 1$). D'après ce qui précède, la transition $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ envoie la section Σ_i sur un secteur exponentiellement plat en $\varepsilon = 0$ et à fortiori leur composition. \square

Dans le cas d'une équation classique de Liénard de type lent-rapide, les cycles lents-rapides sont génériquement communs :

Théoreme 2.11. *Considérons une équation classique de Liénard de type lent-rapide*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\lambda(x) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (24)$$

où $F_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_i x^i + x^{2n+1}$ est un polynôme général de degré $2n+1$. Soit λ_0 tel que F_{λ_0} soit un polynôme de Morse générique (les points critiques sont quadratiques avec des valeurs deux à deux différentes) et que 0 ne soit pas un point critique ($\frac{\partial F_{\lambda_0}}{\partial x}(0) \neq 0$). Alors, tous les cycles lents-rapides sont de type commun et en nombre borné par n . En conséquence, pour $\lambda \sim \lambda_0$ et $\varepsilon \sim 0$, il bifurque au plus n cycles limites, tous hyperboliques. D'autre part, il existe des valeurs de λ_0 pour lesquelles il bifurque exactement n cycles limites.

Preuve

Considérons un cycle lent-rapide quelconque et supposons que ce cycle passe par un point attractant de la courbe lente. En suivant la dynamique lente, on doit arriver à un point de contact qui est de type saut (par hypothèse tous les points de contact contenus dans le cycle sont de type saut). On saute alors, le long d'une trajectoire rapide, vers un point de type attractant (on ne peut pas aller vers un point de contact car les points de contact ont des valeurs 2 à 2

différentes; on ne peut pas aller à l'infini, car un cycle lent-rapide est compact par définition). On passe ainsi par des arcs uniquement de type attractant de la courbe lente. En conséquence le cycle lent-rapide est commun et de type attractant (s'il avait contenu un point répulsif, on a la même preuve en reversant le sens du temps: le cycle n'aurait contenu que des points répulsifs et serait commun de type répulsif).

Les cycle lents-rapides sont 2 à 2 disjoints (celà suit à nouveau du fait que les valeurs critiques sont 2 à 2 distinctes). Chacun de ces cycles doit passer par au moins deux points de contact différents de la courbe lente. Aussi leur nombre est au plus n . Le fait qu'ils bifurquent en au plus n cycles limites tous hyperboliques suit de la Proposition 2.10.

Le maximum n de cycles limites est obtenu en prenant une valeur de λ_0 pour laquelle la courbe lente fait n oscillations emboîtées (voir la Figure 16 qui illustre le cas $n = 3$). \square

Figure 16: Trois cycles lents-rapides communs en degré 7

3 Les cycles canard

On va se limiter comme plus haut aux équations lentes-rapides de type Liénard (8) :

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (25)$$

où F, g sont de classe \mathcal{C}^∞ .

Définition 3.1. *Un cycle canard pour la valeur λ_0 est un cycle lent-rapide qui passe à la fois par des arcs attractifs et des arcs répulsifs de la courbe lente L_{λ_0} .*

3.1 Conditions de création de cycles canard

Nous allons nous placer dans le cas le plus simple où tous les points de contact traversés sont quadratiques. Nous allons seulement parler des 2 mécanismes génériques de créations de cycles canard de codimension 1 :

1. *Mécanisme de bifurcation de Hopf.* C'est le mécanisme le plus classique, à l'oeuvre dans l'équation de Van der Pol étudié dans [BCDD],[DR1],[DR2] par exemple. On suppose qu'un zéro simple de la dynamique lente croise un point critique de la courbe lente, avec une vitesse non nulle. Celà se traduit de la façon suivante: pour simplifier, supposons que $\lambda_0 = 0$ et que le point critique soit à l'origine; on peut alors supposer que $F(x, \lambda) = x^2 + O(x^3)$ et que d'autre part, $\lambda = (a, \nu)$ avec $a \in (\mathbb{R}, 0)$ et on peut écrire $g(x, y, \lambda) = x + a + O(x^2)$.

On voit que pour $a = 0$ (en codimension 1!) l'origine est un point de contact quadratique avec un zéro simple de g . Comme conséquence la dynamique lente descend à gauche et monte à droite de ce

point de contact, et donc garde la même direction (de gauche à droite). Nous allons montrer que celà va permettre l'existence de trajectoires pour $\varepsilon > 0$ mais arbitrairement petit, qui sont proches à la fois d'un arc à gauche et d'un arc à droite du point de contact. C'est ce que l'on appelle le *phénomène canard*. Le point de contact est appelé: *point tournant*.

2. *Mécanisme de saut entre valeurs critiques* Ce cas a été étudié pour la première fois dans [DR3]. On suppose que pour λ_0 , on a 2 points critiques $p_1 < p_2$, qui sont des maxima (ou bien des minima) quadratiques qui ont la même valeur et dont les valeurs se croisent génériquement. Pour λ_0 , une orbite rapide "saute" entre les deux valeurs critiques. On suppose de plus que g n'est pas nulle en ces points p_1, p_2 .

Celà se traduit de la façon suivante. Pour simplifier, supposons que $\lambda_0 = 0$ et que les points critiques soient des maxima quadratiques (on peut supposer que leur position p_1, p_2 est indépendante du paramètre). On suppose de plus que $\lambda = (b, \nu)$, que $F(p_1, 0, \nu) \equiv F(p_2, 0, \nu)$ et que

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, 0, \nu) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_2, 0, \nu) \right] \neq 0.$$

On peut choisir le paramètre b d'être précisément le *paramètre de cassure* du saut :

$$b \equiv F(p_2, b, \nu) - F(p_1, b, \nu)$$

C'est ce que l'on supposera dans la suite. Les deux cas de créations sont illustrés dans la Figure 17

Figure 17: Mécanismes de créations de cycles canard

3.2 Mécanismes de bifurcation des cycles canard

Nous allons maintenant examiner comment des cycles limites peuvent bifurquer dans les deux cas considérés.

(1) *Le cas de saut (entre valeurs critiques)*

Bien qu'il soit d'étude plus récente, nous allons commencer par ce cas, car le mécanisme y est plus simple. Supposons que les points $P_1(\lambda) = (p_1, F(p_1, \lambda))$ et $P_2(\lambda) = (p_2, F(p_2, \lambda))$ soient des maxima. Pour qu'un cycle lent-rapide contienne ces deux points, il est nécessaire que la dynamique lente ait une même direction à gauche de $P_1(\nu, 0)$ et à droite de $P_2(\nu, 0)$. On va supposer par exemple que $g(p_1, 0, \nu) > 0$ et $g(p_2, 0, \nu) < 0$: la dynamique va de gauche à droite et est localement attractante. Cela suppose l'existence de zéros de la fonction g entre p_1 et p_2 . Nous allons nous mettre dans le cas le plus simple: les points $P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)$ font partie d'un cycle canard qui ne contient pas d'autre point de contact. Le cycle canard Γ^ν considéré est alors formé de 2 orbites rapides: $]P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)[$ entre les 2 maxima (le saut!), $]m_1^\nu, m_2^\nu[$ orientée de droite à gauche de m_2^ν vers m_1^ν et joignant 2 points réguliers sur la courbe lente et 2

arcs de la courbe lente: l'un γ_1^ν entre m_1^ν et $P_1(\nu, 0)$ et l'autre γ_2^ν entre m_2^ν et $P_2(\nu, 0)$ (voir Figure 18)

Figure 18: Cycle canard de type saut

On peut alors construire une variété centrale W^λ multi-valuée de la façon suivante. On choisit un point $A_\nu \in]m_1^\nu, m_2^\nu[$ et une section \mathcal{T} transverse à $]P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)[$. Rappelons que les points p_1, p_2 sont critiques pour tout λ correspondant aux points de contact quadratiques $P_1(\lambda), P_2(\lambda)$. Pour tout λ , on considère les trajectoires du champ $X_{\lambda, \varepsilon}$ issues du segment $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps positifs. En utilisant les modèles locaux de Takens on obtient que ces orbites forment une variété centrale W_+^λ qui coupe la section \mathcal{T} le long d'un arc l_+^λ . De même les trajectoires issues de $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps négatifs forment une variété centrale W_-^λ qui coupe \mathcal{T} selon l'arc l_-^λ . La réunion $W^\lambda = W_-^\lambda \cup W_+^\lambda$ est une variété centrale multi-valuée, puisque les deux branches W_-^λ, W_+^λ coupent \mathcal{T} selon deux arcs a priori distincts. On pourrait prolonger indéfiniment W^λ au-delà des arcs l_+^λ, l_-^λ qui sont les premières intersections avec \mathcal{T} , mais cela sera inutile.

Les arcs l_+^λ, l_-^λ sont graphes de fonctions $y = l_+^\lambda(\varepsilon)$ et $y = l_-^\lambda(\varepsilon)$. Le point important, démontré à l'aide des modèles locaux, est que ces fonctions sont ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ au sens suivant :

Définition 3.2. *Considérons un fonction $f(\lambda, \varepsilon)$ définie pour (λ, ε) au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+$. On dit que f est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ si toutes les dérivées partielles dans les composantes de λ existent et sont continues en ε (y compris en $\varepsilon = 0$).*

Par hypothèse, pour $b = \varepsilon = 0$ on a : $l_-^{\nu, 0}(0) = F(p_1, 0, \nu)$ et $l_+^{\nu, 0}(0) = F(p_2, 0, \nu)$. Il en résulte que les 2 arcs vont se croiser quand le paramètre b varie. Pour $b = 0$ ces deux arcs se coupent au moins en $y = 0$. Les cycles limites proches de Γ^ν sont en correspondance biunivoque avec les intersections des 2 arcs.

Figure 19: Croisement des 2 branches de variétés centrales dans le cas de saut

(2) *Le cas de bifurcation de Hopf*

Dans ce cas l'auto-intersection de la variété centrale va apparaître après un éclatement de l'origine. Rappelons l'écriture locale du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\nu(x) = y - x^2 + O(x^3) \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x + O(x^2)) \end{cases} \quad (26)$$

On considère l'éclatement des variables x, y, ε, a donné par :

$$x = \rho \bar{x}, \quad y = \rho^2 \bar{y}, \quad \varepsilon = \rho^2 \bar{\varepsilon}, \quad a = \rho \bar{a}$$

Le domaine de l'espace éclaté le plus important est obtenu en prenant $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}) \in S_+^2 = S^2 \cap \{\varepsilon \geq 0\}$ et $\rho \in (\mathbb{R}^+, 0)$, $a \in (\mathbb{R}, 0)$ (dans des voisinages arbitraires de 0). Dans ce domaine, le champ éclaté $\bar{X}_{(\nu, \bar{a})}$ peut être considéré comme une

famille de champ en dimension 3 et de paramètre (ν, \bar{a}) . En particulier dans la carte de ce domaine donnée par $\bar{\varepsilon} = 1$, ce champs s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - \bar{x}^2 + O(\rho) \\ \dot{\bar{y}} = \bar{a} - \bar{x} + O(\rho) \end{cases} \quad (27)$$

La Figure 20 montre les différents portraits de phase dans la demi-sphère S_+^2 (le diviseur de l'éclatement dans le domaine), en fonction de \bar{a} .

Figure 20: Le champ éclaté sur le diviseur S_+^2

Le champs a 4 point singuliers sur ∂S_+^2 : s_1, s_2, l_1, l_2 . Pour $\bar{a} = 0$ le champ est invariant par la symétrie : $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (-\bar{x}, \bar{y})$. Il en résulte qu'une séparatrice S joint les deux points l_1, l_2 et le champ est de type central. Cette connection est cassée de façon générique (avec une vitesse non nulle) par la variation du paramètre. On va se placer dans le cas le plus simple : on considère un cycle canard Γ formé par une orbite rapide joignant deux points $m_1^\nu = (X_1^\nu, F_\nu(X_1^\nu))$ et $m_2^\nu = (X_2^\nu, F_\nu(X_2^\nu))$ où X_1^ν, X_2^ν sont choisis tels que $F_\nu(X_1^\nu) = F_\nu(X_2^\nu)$, et deux 2 arcs de la variété lente : γ_1^ν entre m_1^ν et 0 et γ_2^ν entre m_2^ν et 0. Le premier est répulsif et le second est attractant (voir Figure 21).

Figure 21: Le cycle canard type Hopf

On va construire une variété centrale W^λ multi-valuée comme dans le cas précédent mais cette fois dans l'espace éclaté. On choisit un point $A_\nu \in]m_1^\nu, m_2^\nu[$ et une section \mathcal{T} tranverse à la séparatrice S . Comme dans le cas précédent on construit deux branches W_\pm^λ d'une variété centrale $W^{(\nu, \bar{a})}$ en considérant les trajectoires du champ éclaté $\tilde{X}_{(\nu, \bar{a})}$ issues du segment $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps positifs et négatifs. Ces deux branches coupent la section \mathcal{T} le long d'arcs $l_\pm^{(\nu, \bar{a})}$. En utilisant les modèles locaux de Takens (en particulier au voisinage des points singuliers l_1, l_2) on montre que ces arcs sont graphes de fonctions $y = l_+^{(\nu, \bar{a})}(\rho)$ et $y = l_-^{(\nu, \bar{a})}(\rho)$ qui sont ρ -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (ν, \bar{a}) .

Par hypothèse, pour $\bar{a} = \varepsilon = 0$ on a : $l_-^{\nu, 0}(0) = l_+^{\nu, 0}(0)$. D'autre part, il suit facilement de la forme de l'équation (27) que $\frac{\partial}{\partial \bar{a}}(l_-^{(\nu, \bar{a})} - l_+^{(\nu, \bar{a})})|_{\bar{a}=0}(0) \neq 0$. Il en résulte que les 2 arcs vont se croiser régulièrement quand le paramètre \bar{a} varie. Pour $\bar{a} = 0$ ces deux arcs se coupent au moins en $y = 0$. Les cycles limites proches de Γ^ν sont en correspondance biunivoque avec les intersections des 2 arcs.

Figure 22: Croisement des 2 branches de variétés centrales dans le cas Hopf

3.3 Bifurcations des cycles canard

Nous allons maintenant préciser les bifurcations des cycles canard introduits dans le paragraphe précédent. nous considérons les systèmes lents-rapides (8).

3.3.1 L'intégrale de divergence lente

Définition 3.3. *Considérons un intervalle $[x_1, x_2]$ et une valeur du paramètre λ tel la fonction $g(x, F_\lambda(x), \lambda)$ n'est pas de zéros sur cet intervalle. On appelle intégrale de divergence lente l'intégrale :*

$$I_\lambda(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{g(x, F_\lambda(x), \lambda)} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \right)^2 dx \quad (28)$$

Plus généralement, on définit l'intégrale de divergence lente I_Γ le long d'un cycle lent-rapide Γ comme étant égal à la somme des intégrales de divergence lente des différents arcs de courbe lente que Γ contient, compte tenu de leur orientation.

La Figure 23 montre les arcs de la courbe lente contenus dans les cycles canard des deux types considérés.

Figure 23: Arcs de la courbe lente

Chacun de ces cycles canard fait partie d'une famille paramétrée par la y -hauteur de l'orbite rapide horizontale arbitraire qu'il contient. On note ce cycle canard $\Gamma_{y, \nu}$ où y est cette hauteur et ν la valeur du paramètre (rappelons que les cycles canard sont définis quand le paramètre de cassure a ou b est nul). On note par $I(y, \nu)$ l'intégrale de divergence lente du cycle canard $\Gamma_{y, \nu}$. Les formules pour $I(y, \nu)$ sont les suivantes :

1.

$$I(y, \nu) = \int_{x_1(y, \nu)}^{p_1(\nu)} + \int_{p_2(\nu)}^{x_2(y, \nu)}$$

2.

$$I(y, \nu) = \int_{x_1(y, \nu)}^{x_2(y, \nu)}$$

où $x_1(y, \nu), x_2(y, \nu)$ sont racines de $y = F_\nu(x_i(y, \nu))$.

3.3.2 Transition d'un point de saut ou de Hopf

Remarquez que la divergence de (8), est égale à $\text{div} X_\lambda = -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} + O(\varepsilon)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \text{div} X_\lambda dt &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} + O(\varepsilon) \right) dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} \right)^2 dx + O(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

car le long de la courbe lente on a : $dy = \frac{\partial F_\lambda}{\partial x} dx$. L'intérêt de l'intégrale de divergence lente vient alors de la formule de Leontovitch-Sotomayor :

Proposition 3.4. *Soit X un champ de vecteur du plan et T l'application de transition entre deux sections : $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ transverses à une même trajectoire γ entre les instants t_1, t_2 . Soit s une paramétrisation de Σ_1 telle que 0 corresponde à $\gamma \cap \Sigma_1$. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des paramétrisations de Σ_1, Σ_2 ($C = 1$ si $\Sigma_1 = \Sigma_2$), telle que :*

$$\frac{dT}{ds}(0) = C \exp \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X dt \quad (30)$$

Nous allons appliquer cette formule. Considérons la transition le long d'un arc régulier de la courbe lente de (8), sans point singulier de la dynamique lente : on choisit un intervalle $[x_1, x_2]$ sur lequel F_λ n'ait pas de point singulier et aussi tel que $g(x, F_\lambda(x), \lambda)$ n'ait pas de zéro; soient $y_1^\lambda = F_\lambda(x_1)$ et $y_2^\lambda = F_\lambda(x_2)$ et pour fixer les idées, supposons que $y_1^\lambda < y_2^\lambda$ (l'arc est attractant); soit Σ une section verticale dans $\{x = x_1'\}$ pour un $x_1' > x_1$, paramétré par y au voisinage de y_1^λ ; soit une section horizontale \mathcal{T} dans $\{y = y_2^\lambda\}$, paramétrée par x au voisinage de $x = x_2$. Posons $X = x - x_2$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.5. *L'application de transition $\Pi_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$ est égale à*

$$\Pi_\lambda(y, \varepsilon) = (X = \pi_\lambda(y, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)$$

avec $\pi_\lambda(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)}$, où $\tilde{I}(y, \nu, \varepsilon)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ . Soit $x_\lambda(y) \in [x_1, x_2]$ défini par l'équation : $y = F_\lambda(x_\lambda(y))$. De plus $\tilde{I}(y, \nu, 0) = I_\lambda(x_\lambda(y), x_2)$, l'intégrale de divergence lente sur le segment $[x_\lambda(y), x_2]$.

Preuve

En recouvrant l'arc $L_\lambda[x_1, x_2]$ par des cartes où l'on a le modèle de Takens de classe \mathcal{C}^K donné dans la Proposition 2.5, on trouve que l'application de transition est de la forme $(X = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)}, \varepsilon)$, avec \tilde{I} une fonction \mathcal{C}^K . Comme K est arbitrairement grand, la fonction M est en fait de classe \mathcal{C}^∞ . Par dérivation, on obtient que $\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} \right| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon} (\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon) + O(\varepsilon \log \varepsilon))}$. Il suit facilement formules (29) et (30) que $\tilde{I}(y, \nu, 0) = I_\lambda(x_\lambda(y), x_2)$. \square

Nous allons maintenant considérer la transition par un des points de contact rencontré par dans les cycles canard étudié. Le paramètre est égal à $\lambda = (\nu, a)$ dans le cas de saut ou bien $\lambda = (\nu, b)$ dans le cas de Hopf, où a, b sont les paramètres de cassure de la situation canard (qui existe pour $a, b = 0$).

On peut tout d'abord avoir la transition par un point de saut $P_\lambda = (p_\lambda, F_\lambda(p_\lambda))$. Supposons pour fixer les idées que p_λ soit un maximum et que $g(p_\lambda, F_\lambda(p_\lambda), \lambda) > 0$. Les trajectoires "sautent" alors de gauche à droite. Considérons un point $x_1 < p_\lambda$, une section verticale Σ dans une droite $\{x = x_1' > x_1\}$ et une section verticale \mathcal{T} à l'orbite rapide sortante de P_λ et située dans une droite $\{x = x_2' > p_\lambda\}$. La section Σ est paramétrée par y au voisinage de $F_\lambda(x_1)$ et la section \mathcal{T} par $z = y - F_\lambda(p_\lambda)$ au voisinage de 0. Pour étudier la transition $\Pi_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$, on utilise l'éclatement du point P_λ décrit plus haut. Après avoir quitté la section Σ , les orbites du champ éclaté suivent tout d'abord le

relevé de l'arc $L_\lambda[x_1, p_\lambda]$ dans l'espace éclaté. Ce relevé aboutit à un point singulier l_1 situé sur le bord S^1 du diviseur S_+^2 . Après être passé au-dessus de ce point, les orbites longent la séparatrice σ pour aboutir au voisinage du point singulier $s_2 \in S^1$. les orbites longent ensuite l'orbite rapide quittant le point de saut P_λ pour finir par aboutir sur la section \mathcal{T} . On considère l'application Π_λ comme composition de ces différents passages. Les calculs à faire pour contrôler les passages au voisinage des points l_1, s_2 utilisent des formes normales en ces points singuliers du champ éclaté et sont assez techniques. Le résultats final est heureusement que ces passages, à des termes de translation près (la fonction φ ci-dessous), n'apportent pas de contribution et que la forme de la transition est essentiellement déterminée par le passage le long de l'arc régulier $L_\lambda[x_1, p_\lambda]$ (voir [DMD]). Le résultat est donc similaire à celui du cas régulier :

Proposition 3.6. *La transition par le point de saut entre les sections Σ et \mathcal{T} définies ci-dessus est égale à*

$$\Pi_\lambda(y, \varepsilon) = (z = \pi(y, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)$$

avec

$$\pi(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)} + \varphi(\lambda, \varepsilon),$$

où $\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)$ est une fonction ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et $\varphi(\lambda, \varepsilon)$ est une fonction ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ , telle que $\varphi(\lambda, 0) = 0$. Soit $x_\lambda(y) \in [x_1, p_\lambda]$ défini par l'équation : $y = F_\lambda(x_\lambda(y))$. De plus $\tilde{I}(y, \lambda, 0) = I_\lambda[x_\lambda(y), p_\lambda]$, l'intégrale de divergence lente sur le segment $[x_\lambda(y), p_\lambda]$.

Pour étudier les cycles canard de type Hopf on doit considérer des transitions entre une section σ transverse aux orbites rapides, comme plus haut, et une section \mathcal{T} transverse à la séparatrice joignant les points l_1, l_2 sur le diviseur. Considérons par exemple la transition par le point l_1 . La seule difficulté est le passage au voisinage de ce point, qui était aussi à considérer dans le cas précédent. L'étude est donc plus facile est avait été faite antérieurement dans [DR1]. Le résultat est complètement similaire à celui du cas précédent et je ne le détaillerai pas plus.

3.3.3 Résultats de bifurcation

Dans le deux cas étudiés (bifurcation de Hopf, croisement de valeurs extrémales), il suit très facilement des résultats rappelés dans le paragraphe précédent que l'intégrale de divergence lente contrôle les bifurcations de cycles limites bifurquant du cycle canard. Ces résultats de bifurcation ont été établis dans [DR2] dans le cas de la bifurcation de Hopf et dans [DR3] dans l'autre cas. Nous allons résumer ces résultats en deux Théorèmes. Le premier majore le nombre des cycles limites pouvant bifurquer et précise la région des paramètres où se passe cette bifurcation, région dite *région canard*. Rappelons que $I(y, \nu)$ désigne l'intégrale de divergence lente le long du cycle canard $\Gamma_{y, \nu}$ lorsque les paramètres de cassure a, b sont nuls. Le paramètre y est choisi dans un intervalle $[y_1, y_2]$ qui ne contient pas la valeur singulière de F_λ du saut ou de la bifurcation de Hopf (voir les Figures 18 et 20). Cette fonction I est de classe \mathcal{C}^∞ .

Théoreme 3.7. 1. Supposons que pour une valeur ν_0 la fonction $y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait au plus n zéros comptés avec leur multiplicité sur l'intervalle $[y_1, y_2]$. Alors il bifurque au plus $n + 1$ cycles limites de l'anneau union des cycles canard : $\cup_{y \in [y_1, y_2]} \Gamma_{y, \nu_0}$.

2. Désignons par c le paramètre a ou b selon le cas. Alors il existe une fonction $c(\varepsilon, \nu)$ ε -régulièrement C^∞ en ν et une constante $K > 0$ telles que, pour qu'il existe un cycle limite, il faut que le ce paramètre c vérifie :

$$|c - c(\varepsilon, \nu)| \leq e^{-\frac{K}{\varepsilon}} \quad (31)$$

Preuve

Nous allons nous contenter de faire la démonstration dans le cas du mécanisme de saut, la démonstration dans l'autre cas est très similaire. Rappelons que $\lambda = (\nu, b)$ où b est le paramètre de cassure du saut. $p_1 < p_2$ sont des maxima fixes et on pose $P_1(\lambda) = (p_1, F(p_1, \lambda))$, $P_2(\lambda) = (p_2, F(p_2, \lambda))$. On a $y(\nu) = F(p_1, \nu, 0) = F(p_2, \nu, 0)$ (hypothèse de saut) et le saut est entre les points de contact $P_1(\nu, 0)$ et $P_2(\nu, 0)$. Le paramètre de cassure du saut est $b = F(p_2, \lambda) - F(p_1, \lambda)$. L'intervalle $[y_1, y_2]$ est choisi tel que $y_1 < y_2 < y(\nu_0)$ et ν est choisi dans un voisinage assez petit de ν_0 de façon que $y_2 < y(\nu)$ pour tout ν . On suppose que l'on peut résoudre par fonction implicite l'équation $y = F(x_i(y, \lambda), \lambda)$ pour $y \in [y_1, y_2]$, $i = 1, 2$ avec $x_1(y, \lambda) < p_1$ et $p_2 < x_2(y, \lambda)$: $(x_1(y, \lambda), y)$ est un point sur l'arc attractant aboutissant à $P_1(\lambda)$ et $(x_2(y, \lambda), y)$ est un point sur l'arc répulsif sortant de $P_2(\lambda)$. On suppose aussi évidemment que $g(x, F(x, \lambda), \lambda) > 0$ pour $x \in [x_1(y_1, \lambda), p_1]$ et que $g(x, F(x, \lambda), \lambda) < 0$ pour $x \in [p_2, x_2(y_1, \lambda)]$ (voir Figure 18). Posons $I_1(y, \nu) = I[x_1(y, \nu, 0), p_1]$ et $I_2(y, \nu) = I[x_2(y, \nu, 0), p_2]$. On a que $I_1, I_2 > 0$.

Soit x_0 choisi tel que $p_1 < x_0 < p_2$. Considérons la section $\Sigma = \{x_0\} \times [y_1, y_2]$ et une section verticale \mathcal{T} également choisie dans la droite $\{x = x_0\}$, et telle que $(x_0, y(\nu)) \in \mathcal{T}$ pour tout ν . On considère les applications de transition $\Delta_1(y, \lambda, \varepsilon), \Delta_2(y, \lambda, \varepsilon) : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$, la première définie en suivant les trajectoires du champs $X_{\lambda, \varepsilon}$ pour les temps positifs et la seconde, en les suivant pour les temps négatifs. L'équations des cycles limites coupant Σ est alors

$$\Delta(y, \lambda, \varepsilon) = \Delta_2(y, \lambda, \varepsilon) - \Delta_1(y, \lambda, \varepsilon) = b \quad (32)$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$, y est racine de (34) si et seulement si l'orbite par (x_0, y) est un cycle limite de $X_{\lambda, \varepsilon}$. Par la Proposition 3.6 on a que $\Delta_i(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} + \varphi_i(\lambda, \varepsilon)$, pour $i = 1, 2$ avec les propriétés données dans l'énoncé et le fait que $\tilde{I}_i(y, \nu, 0, 0) = I_i(y, \nu)$. l'équation (34) s'écrit donc

$$e^{-\frac{\tilde{I}_1(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\tilde{I}_2(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon) \quad (33)$$

Pour pouvoir se débarrasser du terme constant $b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon)$ et pouvoir prendre le logarithme, l'idée est de dériver cette équation. Remarquez que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon) \right) e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = e^{-\frac{J_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}}$$

pour une nouvelle fonction J_i , ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et qui vérifie encore $J_i(y, \nu, 0, 0) = I_i(y, \nu)$. L'équation

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y}(y, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad (34)$$

est donc équivalente à

$$e^{-\frac{J_1(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = e^{-\frac{J_2(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} \quad (35)$$

En prenant le logarithme des deux membres de (33) et en multipliant par ε , lorsque $\varepsilon > 0$, on obtient finalement que pour $\varepsilon > 0$, l'équation (34) est équivalente à

$$J(y, \lambda, \varepsilon) = J_1(y, \lambda, \varepsilon) - J_2(y, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad (36)$$

où $J(y, \lambda, \varepsilon)$ est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et est telle que

$$J(y, \nu, 0, 0) = I_1(y, \nu, 0, 0) - I_2(y, \nu, 0, 0) = I(y, \nu).$$

Supposons maintenant que pour une valeur ν_0 la fonction $y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait au plus n zéros comptés avec leur multiplicité sur l'intervalle $[y_1, y_2]$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il en est de même pour la fonction : $y \rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial y}(y, \lambda, \varepsilon)$. En appliquant le Théorème de Rolle on obtient alors que la fonction $y \rightarrow \Delta(y, \lambda, \varepsilon)$ a au plus $n + 1$ zéros sur $[y_1, y_2]$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit et ν assez proche de ν_0 \square

Le second Théorème qui est plus délicat à démontrer, donne une condition nécessaire pour une bifurcation générique :

Théorème 3.8. *Supposons qu'au point $y_0 \in]y_1, y_2[$ et pour la valeur du paramètre ν_0 , la fonction $y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait un zéro d'ordre k et la famille $I(y, \nu)$ bifurque génériquement en fonction de $\nu - \nu_0$. Alors il existe une famille continue Γ^ε de cycles limites, bifurquant du cycle canard ($\Gamma^0 = \Gamma_{y_0, \nu_0}$), telle que Γ^ε soit un cycle limite d'ordre $k + 1$ qui bifurque génériquement en fonction du paramètre $(c, \nu - \nu_0)$ (c désigne le paramètre de cassure a ou b selon le cas).*

Remarque 3.9. *Une fonction $f(y)$ a un zéro d'ordre k en y_0 si*

$$f(y_0) = \frac{df}{dx}(y_0) = \dots = \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}(y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k f}{dx^k}(y_0) \neq 0.$$

Considérons un déploiement $f(y, \lambda)$ du germe (f, y_0) pour un paramètre $\lambda \in (\mathbb{R}^p, \lambda_0)$ ($f(x) \equiv f(x, \lambda_0)$.) Par le Théorème de Préparation de Weierstrass, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty : \beta_0(\lambda), \dots, \beta_{k-1}(\lambda)$ et une fonction $\mathcal{C}^\infty : U(y, \lambda)$ telle que $U(y_0, \lambda_0) \neq 0$, et que :

$$f(y, \lambda) = U(y, \lambda) \left((y - y_0)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i(\lambda) (y - y_0)^i \right)$$

On dit que le déploiement $f(y, \lambda)$ est générique si l'application

$$\lambda \rightarrow \beta(\lambda) = (\beta_0(\lambda), \dots, \beta_{k-1}(\lambda))$$

est de rang maximum en λ_0 (celà suppose que $p \geq k$).

Je ne vais pas donner ici de preuve du Théorème 3.8. On trouvera cette preuve dans [DR2] pour le cas de Hopf et dans [DR3] dans le cas de croisement de valeurs critiques. Considérons le cas de croisement de valeurs critiques. L'idée de la preuve est de faire un changement d'échelle dans la variable $Y = y - y_0$ en posant : $\tilde{Y} = \frac{Y}{\varepsilon}$. Dans cette variable \tilde{Y} la fonction $\Delta(y, \lambda, \varepsilon) - b$ pour $\varepsilon > 0$ fixé, est équivalente à un déploiement générique à $p+1$ paramètres : ν_1, \dots, ν_p et $\tilde{b} = e^{\frac{\tilde{I}(y_0, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} (b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon))$ (cette écriture de \tilde{b} , qui doit être considéré comme un nouveau paramètre, permet de retrouver le confinement donné par (31)).

BIBLIOGRAPHIE

- [BCDD] **E. Benoit, J.L. Callot, F. Diener, M. Diener** *Chasse au canard*, Collectanea Mathematica, 31-32 (1-3), 37–119 (1981)
- [DMD] **P. De Maesschalk, F. Dumortier** *Canard solutions at generic turning points*, Trans. Amer. Math. Soc, 358, 2291–2334 (2006).
- [DR1] **F. Dumortier, R. Roussarie** *Canard Cycles and Center Manifolds*, Memoirs of Amer. Math. Soc. Vol. 121, n° 577, 1–100 (1996).
- [DR2] **F. Dumortier, R. Roussarie** *Multiple Canard Cycles in Generalized Liénard Equations*, Journ. Diff. Equa. vol. 174, 1–29 (2001).
- [DR3] **F. Dumortier, R. Roussarie** *Bifurcation of relaxation oscillations in dimension two*, Prépublication de l’Institut de Mathématique de Bourgogne n° 426 (2005).
- [PR] - **D. Panazzolo, R. Roussarie** *A Poincaré-Bendixson Theorem for Analytic Families of Vector Fields*, Bol. Soc. Br. Mat., Vol.26, N. 1 (1995), 85-116.
- [R] **R. Roussarie** *Putting a boundary to the space of Linard equations*, D.C.D.S., Vol. 17, n° 2 441–448 (2007).
- [S] **S. Smale** *Mathematical Problems for the Next Century*, Springer Verlag New York, Vol. 20, n° 2, 7–15 (1998).
- [T1] **F. Takens** *Partially hyperbolic vector fields*
- [T2] **F. Takens** *Singularities of vector fields*, Publ. IHES 43 (1974), 48-100 .
- [VdP] **B. Van der Pol** *On oscillation hysteresis in a triode generator with two degree of freedom* Phil. Mag. (6) 43, 700–719 (1922).