T.SARI, M.MBAYE

2006-2007

1. Soit f impaire de période 2π : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$. Calculer le développement en série de Fourier de f. En déduire $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
2. Soit f de période T : $f(t) = a$ pour $t \in]0, L[, 0\langle L\langle T, f(t) = 0$ pour $t \in]L, T[$. Calculer le développement de Fourier de f.
3. Soit f de période 2π : $f(t) = t$ pour $t \in] - \pi, \pi[$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Calculer le développement en série de Fourier de f. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$.
4. Soit $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Soit f de période 2π : $f(t) = \exp(iat)$. Calculer les coéfficients de Fourier complexes de f. En utilisant l'égalité de Parseval montrer que
$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi a)^2}.$$
5. a) Déterminer les coéfficients de Fourier de la fonction g, paire et de période 2π sur $\mathbb{R}$, vérifiant $g(t) = \pi - 2t$ pour $0 < t < \pi$.
b) Montrer que la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur tout $\mathbb{R}$.
c) En déduire, par intégration, la série de Fourier de la fonction *impaire* f, de période 2π, définie par $f(t) = t(\pi - t)$ pour $0 < t < \pi$.
d) Quelle relation obtient-on en appliquant à f le théorème de Parseval ?
6. Trouver une solution développée en série de Fourier de l'équation différentielle : $y' + y = f(t)$ avec f de période T : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, T]$, $0 < L < T$, $f(t) = 0$ pour $t \in]L, T]$. Est-ce qu'il y a unicité ?

7. Chercher une solution développée en série de Fourier de l'équation différentielle : $y'' + y = f(t)$ avec f impaire de période 2π : $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi}$ pour $t \in [0, \pi]$.