Intégrales impropres et séries

Tewfik Sari

L2 Math

Chapitre 1

Rappels sur l'intégration

1.1 Intégrale de Riemann des fonctions en escalier

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Une subdivision de $[a,b]$ et une suite fine et strictement croissante de points de $[a,b]$ telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Définition 1 *Soit E un espace normé. Soit $f : [a,b] \to E$. On dit que f est une fonction en escalier, s'il exitse un subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a,b]$, telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$, pour $0 \leq i \leq n-1$. Une telle subdivision est dite associée à f.*

Définition 2 *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction en escalier. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ une subdivision associée à f et soit $c_i = f_{|]x_i, x_{i+1}[}$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ la somme notée*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i. \tag{1.1}$$

Exercice Montrer que l'intégrale d'une fonction en escalier f ne dépend pas de la subdivision σ associée à f qui est utilisée pour la calculer par la formule (1.1).

Proposition 1 (Propriétés de l'intégrale) *Notons par $\mathcal{E}([a,b], E)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.*
Relation de Chasles. *Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b], E)$ et tout $c \in [a,b]$ on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Linéarité. *Pour tous f et g dans $\mathcal{E}([a,b], E)$ et tous réels λ et μ on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Croissance. *Soient f et g dans $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Par conséquent, si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
Majoration. *Pour tout $f \in \mathcal{E}([a,b], E)$ on a*

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz. *Pour tous f et g dans $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ on a*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Exercice Démontrer les résultats de cette proposition.

1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux

Dans la section précédente on a montré comment intégrer les fonctions en escalier, qui sont des cas particuliers de fonctions bornées. Dans cette section nous allons intégrer les fonctions continues par morceaux, en les approchant par des fonctions en escalier.

Définition 3 *Une fonction $f : [a,b] \to E$ est dite continue par morceaux si et seulement s'il existe une subdivision $s = (a_0, \cdots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ la restriction $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ soit continue et admette une limite à gauche en a_i et une limite à droite en a_{i+1}.*

Théorème 1 *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux.*

- *Il existe une suite (f_n) de fonctions en escaliers $f_n : [a,b] \to E$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*
- *Si E est complet, alors pour toutes les suites (f_n) de fonctions en escaliers sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$, la suite $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge dans E vers une même limite, appelée l'intégrale de f sur $[a,b]$ et notée*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Proposition 2 (Propriétés de l'intégrale) *Notons $\mathcal{CM}([a,b],E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.*

Relation de Chasles. *Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$ et tout $c \in [a,b]$ on a $f \in \mathcal{CM}([a,c],E)$ et $f \in \mathcal{CM}([c,b],E)$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Linéarité de l'intégrale. *Pour tous $f,g \in \mathcal{CM}([a,b],E)$ et tous réels λ et μ on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{CM}([a,b],E)$ et*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx.$$

Croissance. *Pour tous $f,g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \le g(x)$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Par conséquent, si $f \ge 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Majoration. *Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],E)$ on a $\|f\| \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et*

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \le \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz. *Pour tous $f,g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ on a $fg \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Exercice Démontrer cette proposition.

Proposition 3 *Soit f continue sur $[a, b]$ telle que $f \geq 0$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ sur } [a, b].$$

1.3 Sommes de Riemann

Définition 4 *Soit $f : [a, b] \to E$ une fonction. Soit $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, une subdivision de $[a, b]$ et soit $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\}$, telle que $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \cdots, n-1$, une suite de points. On appelle somme de Riemann de f associée à σ et ξ la somme notée*

$$R(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i).$$

Théorème 2 *Si la fonction $f : [a, b] \to E$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ et toute suite de points $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}\}$ on a*

$$x_{i+1} - x_i < \delta \text{ et } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1 \;\Rightarrow\; \left| R(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

Chapitre 2

Intégrales généralisées

2.1 Position du problème

Dans le chapitre 1 on a rappelé la définition de l'intégrale (si elle existe) d'une fonction bornée sur un intervalle borné. Dans ce chapitre on va étendre la notion d'intégrale (si elle existe) à des fonctions non bornées ou des intervalles non bornés (ou les deux). Plus précisément, on veut géneraliser la notion d'intégrale et définir l'intégrale généralisée (si elle existe)

$$\int_I f(x)dx \tag{2.1}$$

où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et éventuellement non bornée sur I, ou non définie en des points isolés de I. On dit que (2.1) est une *intégrale généralisée* ou *intégrale impropre*. Comme on veut conserver l'additivité de l'intégrale (Relation de Chasles) on décomposera TOUJOURS l'intégrale (2.1) en une somme d'intégrales de la forme

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ avec } a < b \leq +\infty \text{ et } f : [a, b[\to \mathbb{R} \text{ continue},$$

ou bien de la forme

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ avec } -\infty \leq a < b \text{ et } f :]a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue}.$$

Par exemple on posera

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} &= \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-x^2} \\ &+ \int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2},\end{aligned}$$

ca l'intégrale considérée est "impropre" en $\pm\infty$ et en ± 1. L'intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ n'aura de sens que si chacune des six intégrales dont elle est la somme existe.

Comme la situation sur $]a, b]$ est analogue à celle sur $[a, b[$, nous allons dans la suite définir les intégrales généralisées de f sur $[a, b[$, avec $a < b \leq +\infty$. On examine d'abord le cas $b = +\infty$, puis le cas où $b < +\infty$ et f est continue sur $[a, b[$ et non bornée.

2.2 Intégrale sur un intervalle non borné

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par conséquent f est intégrable sur tout intervalle $[a, x]$ avec $x > a$, de sorte que le nombre $\int_a^x f(t)dt$ est bien défini.

Définition 5 *On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe (ou converge) si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ exite et est finie. Dans ce cas on note*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette limite n'existe pas ou bien est infinie on dira que l'intégrale diverge.

Exercice Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dt.$$

On a le résultat suivant qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite.

Proposition 4 *Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} b(t)dt$ convergent, alors pour tous nombres réels λ et μ, $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge et on a*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

2.2.1 Fonctions positives

Théorème 3 (Critère de comparaison) *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$ alors*

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge},$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge},$$

Comme une fonction croissante (ici $\int_a^x f(t)dt$) et bornée a une limite et qu'une fonction croissante et qui n'a pas de limite tend vers $+\infty$, on a le résultat.

Exercice Rédiger les détails de la démonstration.

Théorème 4 (Critère d'équivalence) *Si $f, g \geq 0$ pour t assez grand et si $f \sim g$ quand $t \to +\infty$ (c'est à dire $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$), alors*

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

On utilise ces deux théorèmes pour comparer la fonction à des fonctions de référence données dans la proposition suivante

Proposition 5 (Fonctions de comparaison)
Intégrales de Riemann *:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

Intégrales de Bertrand *:*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1.$$

Exercice Démontrer cette proposition.

2.2.2 Fonctions de signe quelconque

D'après le critère de Cauchy d'existence de la limite de la fonction $\int_a^x f(t)dt$ on a

Proposition 6 (Critère de Cauchy) *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \textit{ converge } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c > a \forall x', x'' \in [c, +\infty[\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Définition 6 *On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est semi convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

Théorème 5 *La convergence absolue d'une intégrale implique sa convergence.*

Pour démontrer ce résultat, il suffit de constater que

$$\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x'}^{x''} |f(t)|dt \right|.$$

et d'utiliser le critère de Cauchy.

Exercice Rédiger les détails de la démonstration.

2.3 Fonction non bornée sur un intervalle borné

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Par conséquent f est intégrable sur tout intervalle $[a, x]$ avec $a < x < b$, de sorte que le nombre $\int_a^x f(t)dt$ est bien défini.

Définition 7 *On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ existe (ou converge) si $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ exite et est finie. Dans ce cas on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette limite n'existe pas ou bien est infinie on dira que l'intégrale diverge.

Exercice Déterminer la nature (convergente ou divergente) des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^1 \frac{dt}{t}, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{t^2}, \qquad \int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

On a le résultat suivant qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite.

Proposition 7 *Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b b(t)dt$ convergent, alors pour tous nombres réels λ et μ, $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge et on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

2.3.1 Fonctions positives

Théorème 6 (Critère de comparaison) *Si* $0 \leq f \leq g$ *sur* $[a, b[$ *alors*

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge},$$

$$\int_a^b f(t)dt \text{ diverge } \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ diverge},$$

Comme une fonction croissante (ici $\int_a^x f(t)dt$) et bornée a une limite et qu'une fonction croissante et qui n'a pas de limite tend vers $+\infty$, on a le résultat.

Exercice Rédiger les détails de la démonstration.

Théorème 7 (Critère d'équivalence) *Si* $f, g \geq 0$ *pour* t *proche de* b *et si* $f \sim g$ *quand* $t \to b$ *(c'est à dire* $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$*), alors*

$$\int_a^b g(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

On utilise ces deux théorèmes pour comparer la fonction à des fonctions de référence données dans la proposition suivante

Proposition 8 (Intégrales de Riemann) *Soit* $a < b$ *alors (attention, l'intégrale est impropre en* a*)*

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

Exercice Démontrer cette proposition.

2.3.2 Fonctions de signe quelconque

D'après le critère de cauchy d'existence de la limite de la fonction $\int_a^x f(t)dt$ on a

Proposition 9 (Critère de Cauchy) *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists c \in]a, b[\forall x', x'' \in [c, b[\left| \int_{x'}^{x''} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Définition 8 *On dit que* $\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente si* $\int_a^b |f(t)|dt$ *converge. On dit que* $\int_a^b f(t)dt$ *est semi convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

Théorème 8 *La convergence absolue d'une intégrale implique sa convergence.*

Chapitre 3

Séries

Etant donnée une suite u_n dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement dans un espace vectoriel E, on appelle série de terme général u_n, la suite

$$u_0,\ u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_2, \cdots,\ u_0+u_1+\cdots+u_n, \cdots$$

c'est à dire la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\sum u_n$ cette suite.

3.1 Rappels sur les suites

Définition 9 *On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels (ou complexes) est convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, appelé la limite de la suite, tel que $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$. On écrit alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N \forall n (n > N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon).$$

Proposition 10 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *La suite (u_n) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, c'est à dire*

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \forall p, q (q, p > N \Rightarrow |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Définition 10 *On dit qu'une suite (u_n) d'un espace normé $(E, \|)$ est convergente s'il existe $l \in E$, appelé la limite de la suite, tel que $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$. On écrit alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0 \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists N \forall n (n > N \Rightarrow \|u_n - l\| < \epsilon).$$

Proposition 11 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *Dans un espace complet, la suite (u_n) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, c'est à dire*

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \forall p, q (q, p > N \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \epsilon.$$

3.2 Séries dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

3.2.1 Convergence et convergence absolue

Soit (u_n) une suite de nombres réels (ou complexes).

Définition 11 *On dit que la série de terme général u_n (en abrégé la série $\sum u_n$) converge si la suite $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Dans ce cas on note*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Si cette limite n'existe pas ou bien est infinie on dira que la série diverge.

Comme $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on a la proposition suivante

Proposition 12 [Condition nécessaire de convergence] *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Le critère de convergence de Cauchy pour les suites donne la CNS de convergence suivante pour les séries

Proposition 13 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* $\sum_{k=0}^{n} u_k$ *est de Cauchy, ce qui s'écrit*

$$\sum u_n \textit{ converge } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall p, q (q > p > N \Rightarrow \left| \sum_{k=p}^{q} u_k \right| < \epsilon.$$

Définition 12 [Convergence absolue] *On dit que la série* $\sum u_n$ *converge absolument si la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Proposition 14 *La convergence absolue implique la convergence.*

Ce résultat est une conséquence du critère de Cauchy et de la propriété

$$\left| \sum_{k=p}^{q} u_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |u_k|.$$

Exercice Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes

$$\sum r^n, \qquad \sum \frac{2n-1}{2n+1}, \qquad \sum \frac{1}{n}, \qquad \sum \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a le résultat suivant qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite.

Proposition 15 *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors pour tous nombres réels* λ *et* μ, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

3.2.2 Séries à termes réels positifs

Théorème 9 (Critère de comparaison) *Si* $0 \leq u_n \leq v_n$ *alors*

$$\sum v_n \textit{ converge } \Rightarrow \sum u_n \textit{ converge},$$

$$\sum u_n \textit{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \textit{ diverge},$$

Exercice Rédiger les détails de la démonstration.

Théorème 10 (Critère d'équivalence) *Si* $u_n, v_n \geq 0$ *pour* n *assez grand et si* $u_n \sim v_n$ *quand* $n \to +\infty$ *(c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*), alors*

$$\sum u_n \textit{ converge } \Leftrightarrow \sum v_n \textit{ converge}.$$

Exercice Démontrer ce théorème.

Théorème 11 (Comparaison avec une intégrale) *Soit n_0 un entier positif. Soit*

$$f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$$

une fonction continue, décroissante et telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

PREUVE. Notons $u_n = f(n)$ pour $n \geq n_0$. Comme f est décroissante, $u_k \leq f(t) \leq u_{k-1}$ pour $t \in [k-1, k]$. D'où

$$u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq u_{k-1}$$

Par conséquent, si on note $v_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt$, on a, en utilisant le critère de comparaison 9

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum v_n \text{ converge.}$$

Il suffit de remarquer alors que (montrer le)

$$\sum v_n \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge.}$$

Ce qui achève la démonstration.

On utilise les théorèmes 9 et 10 pour comparer la série à des séries de référence données dans la proposition suivante

Proposition 16 Série géométrique *: Soit a et r des nombres réels (ou complexes) alors*

$$\sum ar^n \text{ converge si et seulement si } |r| < 1.$$

Série de Riemann *: Soit α un nombre réel alors*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

Série de Bertrand *: Soit α et β des nombres réel alors*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1.$$

Exercices

1. Démontrer cette proposition.
2. Démontrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}\alpha > 1$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Théorème 12 [Test de Cauchy] *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit*

$$\lambda = \overline{\lim}\,(u_n)^{1/n}$$

alors
- *a) si $\lambda < 1$ la série converge,*
- *b) si $\lambda > 1$ la série diverge,*
- *c) si $\lambda = 1$ on ne peut rien conclure.*

Théorème 13 [Test de d'Alembert] *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et soit*

$$\lambda = \overline{\lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

alors
- *a) si $\lambda < 1$ la série converge,*
- *b) si $\lambda > 1$ la série diverge,*
- *c) si $\lambda = 1$ on ne peut rien conclure.*

Exercices
1. Démontrer ces deux théorèmes.
2. Application : nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Proposition 17 *Soit u_n une suite de nombres réels positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ existe (les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = +\infty$ sont permis aussi) alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n}$ et on a $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda$.*

Exercices
1. Démontrer cette proposition.
2. Application : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^{1/n}$.

3.2.3 Produit de Cauchy des séries

Définition 13 *On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n$ dont les éléments sont dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la série $\sum w_n$ définie par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Théorème 14 *Si $\sum u_n$ et $\sum u_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Exercices
1. Démontrer ce théorème.
2. Application : **Exponentielle complexe**. Démontrer que la série $\sum \frac{z}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. On note par

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

sa somme et on l'appelle l'exponentielle du nombre complexe z. Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

3.2.4 Séries semi convergentes

Théorème 15 (Séries alternées) *Soit a_n une suite décroissante de nombres réels positifs, telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente et on a*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

Exercices
1. Démontrer ce théorème.
2. Application : **Série de Riemann**. Démontrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 16 (Règle d'Abel) *Soient a_n et b_n des suites de nombres réels ou complexes telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge et la suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée. Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.*

Corollaire 1 *Soit a_n et une suite décroissante de nombres réels telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Soit b_n une suite de nombres réels ou complexes telle que la suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ soit bornée. Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.*

Exercices
1. Démontrer ce théorème ainsi que son corollaire.
2. Application : **Séries trigonométriques**. Soit a_n une suite de nombres réels positifs, dcroissante et qui tend vers 0. Démontrer que pour tout $t \neq 0$ (mod 2π), la série $\sum a_n e^{int}$ converge.

3.3 Séries dans les espaces normés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit (u_n) une suite d'éléments de E.

Définition 14 *On dit que la série de terme général u_n (en abrégé la série $\sum u_n$) converge si la suite $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Dans ce cas on note*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Si cette limite n'existe pas on dira que la série diverge.

Comme $u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, on a la proposition suivante

Proposition 18 [Condition nécessaire de convergence] *Si la série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Le critère de convergence de Cauchy pour les suites donne la CNS de convergence suivante pour les séries

Proposition 19 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *Si E est complet, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy, ce qui s'écrit*

$$\sum u_n \textit{ converge } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall p, q (q > p > N \Rightarrow \left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| < \epsilon.$$

Définition 15 [Convergence absolue] *On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum \|u_n\|$ converge.*

Le résultat suivant est une conséquence du critère de Cauchy et de la propriété

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|u_k\|.$$

Proposition 20 *Si E est complet, alors la convergence absolue implique la convergence.*

On a le résultat suivant qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite.

Proposition 21 *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tous nombres réels λ et μ, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

On considère maintenant une algèbre normée $(E, \|\cdot\|)$, c'est à dire une algèbre munie d'une norme vérifiant en plus des propriétés des norme l'inégalité

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Définition 16 *On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n$ dont les éléments sont dans E, la série $\sum w_n$ définie par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Théorème 17 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre normée complète. Si $\sum u_n$ et $\sum u_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Exercices
1. Démontrer ce théorème.
2. Application : **Exponentielle d'une matrice**. On munit l'ensemble E des matrice carrée d'une norme matricelle qui en fait une algèbre normée (donc complète). Démontrer que la série $\sum \frac{A}{n!}$ est absolument convergente pour tout $A \in E$. Montrer que la série $\sum \frac{A}{n!}$ est convergente. On note par

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{n!} = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

sa somme et on l'appelle l'exponentielle de la matrice A. Montrer que pour toutes matrices A et B qui commutent, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

Théorème 18 **(Règle d'Abel)** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ une algèbre normée complète. Soient a_n et b_n des suites dans E telles que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, la série $\sum \|a_n - a_{n+1}\|$ converge et la suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée. Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.*

Exercice Démontrer ce théorème.

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

4.1 Convergence d'une suite

Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonction d'un ensemble X vers un espace normé E.

Définition 17 [Convergence simple] *On dit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : X \to E$ si pour tout $x \in X$ la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. On écrit alors*

$$\begin{aligned} f_n \longrightarrow f &\Leftrightarrow \forall x \in X \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \, \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n (n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon). \end{aligned}$$

Définition 18 [Convergence uniforme] *On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : X \to E$ si la suite $\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|$ converge vers 0. On écrit alors*

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{\text{unif}} f &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall x \in X \, \forall n (n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon). \end{aligned}$$

Proposition 22 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *On suppose que l'espace E est complet. La suite f_n est convergente si et seulement si pour tout $x \in X$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy, c'est à dire*

$$\forall x \in X \, \forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall p, q (q > n_0, p > n_0 \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \epsilon).$$

La suite f_n est uniformément convergente si et seulement si elle est uniformément de Cauchy, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall x \in X \, \forall p, q (q > n_0, p > n_0 \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \epsilon).$$

4.2 Convergence d'une série

Soit $f_n := X \to E$ une suite de fonction d'un ensemble X vers un espace normé E.

Définition 19 *On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n f_k$ est simplement (resp. uniformément) convergente. On note*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Proposition 23 [Condition nécessaire de convergence] *Si la série $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) alors la suite f_n converge simplement (resp. uniformément) vers 0.*

Proposition 24 [Condition nécessaire et suffisante de convergence] *On suppose que l'espace E est complet. La série $\sum f_n$ est convergente si et seulement si pour tout $x \in X$ la suite $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est de Cauchy, c'est à dire*

$$\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \forall p, q (q > p > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right\| < \epsilon).$$

La série f_n est uniformément convergente si et seulement si la suite $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ est uniformément de Cauchy, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ \forall x \in X\ \forall p, q (q > p > n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right\| < \epsilon).$$

Proposition 25 [Condition suffisante de convergence uniforme] *Si l'espace E est complet et si la série $\sum f_n$ est normalement convergente, c'est à dire s'il existe une série de nombre réels positifs convergente $\sum a_n$ telle que $\|f_n(x)\| \leq a_n$ pour tout $x \in X$, alors elle est uniformément convergente.*

4.3 Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 19 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur une partie X d'un espace métrique à valeurs dans un espace normé E. Soit a un point adhérant à X. Si $f_n \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ et si $l_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe alors les limites $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{n \to +\infty} l_n$ existent et sont égales. En d'autres termes*

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Ce résultat reste vrai si $a = +\infty$ et $f_n :]0, +\infty[\to E$.

Corollaire 2 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur une partie X d'un espace métrique à valeurs dans un espace normé E. Si $f_n \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ et si les fonctions f_n sont continues sur X alors la fonction f est continue sur X.*

Théorème 20 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f_n \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} f$ et si les f_n sont intégrables sur $[a, b]$, alors f est inégrable sur $[a, b]$ et on a $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt$. En d'autres termes*

$$\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Théorème 21 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f_n \longrightarrow f$ et $f_n' \stackrel{\text{unif}}{\longrightarrow} g$ alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $f' = g$. En d'autres termes*

$$\left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \to +\infty} (f_n)'.$$

4.4 Propriétés de la somme d'une série de fonctions

Théorème 22 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur une partie X d'un espace métrique à valeurs dans un espace normé E. Soit a un point adhérant à X. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément et si $l_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe alors la limite $\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ existent et sont égales. En d'autres termes*

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Ce résultat reste vrai si $a = +\infty$ et $f_n :]0, +\infty[\to E$.

Corollaire 3 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur une partie X d'un espace métrique à valeurs dans un espace normé E. Si $\sum f_n$ converge uniformément et si les fonctions f_n sont continues sur X alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.*

Théorème 23 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément et si les f_n sont intégrables sur $[a, b]$, alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est inégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Théorème 24 *Soit $f_n : X \to E$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la série $\sum f_n$ est convergente et la série $\sum f'_n$ est uniformément convergente alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (f_n)'.$$

4.5 La fonction ζ de Riemann

On considère la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

définie sur $U = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re(s)} > 1\}$.

1. Montrer que la fonction ζ est continue sur U.
2. Montrer que la fonction ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que sa dérivée est

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

3. Montrer que la fonction ζ est convexe sur $]1, +\infty[$ (c'est à dire $\zeta''(s) > 0$ pour tout $s > 1$).
4. Calculer $\lim_{s\to 1} \zeta(s)$ et $\lim_{s\to +\infty} \zeta(s)$ et dessiner le graphe de la fonction ζ.

Chapitre 5

Séries entières

Une série entière est une série $\sum f_n$ de fonctions définie sur $\mathbb{C}$ de la forme $f_n(z) = a_n z^n$, où a_n est une suite de nombres réels ou complexes.

5.1 Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $R = \sup(A)$ où

$$A = \{r \geq 0 : \text{ la suite } a_n r^n \text{ est bornée}\}.$$

Théorème 25 *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

1. *$|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente,*
2. *$|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ est divergente.*

Le nombre R est appelé le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Noter que $R \geq 0$ ou bien $R = +\infty$. Le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la série. Si $R = +\infty$ alors $D(0, R) = \mathbb{C}$. Les critère de Cauchy et de d'Alembert de convergence de séries à termes réels positifs fournissent des formules pour calculer le rayon de convegrence d'une série entière.

Proposition 26 *Si $L = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ existe alors $R = 1/L$.*
Si $L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe alors $R = 1/L$.

5.2 Convergence uniforme

Théorème 26 *Soit $\sum a_n(z)$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r \in]0, R[$. Alors $\sum a_n(z)$ est normalement (donc uniformément) convergente sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.*

En général il n'y a pas de convergence uniforme sur tout le disque de convergence, comme le montre la série géométrique $\sum z^n$, de rayon de convergence $R = 1$, qui ne converge pas uniformément sur $D(0, 1)$ car la suite z^n ne tend pas uniformément vers 0 sur $D(0, 1)$.

5.3 Série dérivée d'une série entière

Définition 20 *La série dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ est la série $\sum (n + 1)a_{n+1} z^n$.*

Proposition 27 *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

5.4 Propriétés de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

définie pour $z \in D(0, R)$.

Théorème 27 *La fonction f est continue sur $D(0, R)$.*

Théorème 28 *Pour tout intervalle $[a, b] \subset]-R, R[$ on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1} \right).$$

Corollaire 4 *La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ admet comme primitives sur $]-R, R[$ les fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$, où C est une constante.*

Théorème 29 *La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ et on a*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Corollaire 5 *La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et pour tout entier n on a $f^{(n)}(0) = n! a_n$. Par conséquent, pour tout $x \in]-R, R[$, on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{5.1}$$

La série (5.1) s'appelle la série de Taylor de f en 0.

5.5 Fonctions développables en séries entières

Soit D un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$.

Définition 21 *La fonction f est dite développable en série entière (DSE) en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ et un réel $R > 0$ tel que $]-R, R[\subset D$ et*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad \textit{pour tout } x \in]-R, R[.$$

Proposition 28 *Une condition nécessaire pour que f soit DSE en 0 est que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0. Dans ce cas les colleficients de la série entière $\sum a_n x^n$ dont f est la somme sont donnés par*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Par conséquent une fonction qui est DSE en 0 est la somme de sa série de Taylor dans un voisinage de 0.

Cette condition n'est pas suffisante. En effet la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et pour tout entier n on a $f^{(n)}(0) = 0$ (montrer le), mais f n'est égale à la somme de sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, dans aucun voisinage de 0, car la fonction f ne s'annulle qu'en 0, alors que la somme de sa série de taylor est nulle.

Théorème 30 *La fonction f est DSE en 0 si et seulement si il existe $R > 0$ tel que*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.*
2. *pour tout $x \in]-R, R[$ on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = 0.$$

Corollaire 6 *Pour que la fonction f soit DSE en 0 il suffit qu'il existe $R > 0$ tel que*

1. *f soit est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.*
2. *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Pour démontrer ce corollaire il suffit d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-v)^n f^{(n+1)}(xv) dv.$$

On a donc

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n)!} \int_0^1 (1-v)^n dv = M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit $u_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Par le critère de d'Alembert la série $\sum u_n$ converge, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5.6 Développement en série entière des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad \forall x \in]-1, 1[$$

5.7 Exponentielle complexe

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on définit e^z par

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$e^0 = 1, \qquad \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}, \qquad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad e^z \neq 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Théorème 31 *La fonction $z \mapsto e^z$ est un homomorphisme surjectif et non injectif du groupe additif $\mathbb{C}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.*

Cet homomorphisme de groupe n'est pas injectif car $e^{z+2\mathrm{i}\pi} = e^z$. Par ailleurs on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \forall w \in \mathbb{C}^* \qquad e^z = w \Leftrightarrow z = \ln|w| + \mathrm{i}(\mathrm{Arg}w + 2k\pi)$$

où $\mathrm{Arg}(w)$ est l'argument du nombre complexe non nul w, c'est à dire l'unique réel tel que $-\pi \leq \mathrm{Arg}(w) < \pi$ et

$$w = |w|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}(w)}.$$

Exercice Démontrer que l'application

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

est un difféomorphisme de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \pi\}$ dans $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u,0) : v \leq 0\}$.

L'application $z \mapsto e^z$ est donc bijective de U dans V. Sa reciproque est appelée la fonction logarithme. Elle est définie de V dans U par

$$\mathrm{Log}w = \ln|w| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}w.$$

Chapitre 6

Séries de Fourier

6.1 Coefficients de Fourier

Soit c_n une suite de nombres complexes. On note par $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt} = c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{\mathrm{i}nt} + c_{-n}e^{-\mathrm{i}nt}\right).$$

Comme on a

$$e^{\mathrm{i}nt} = \cos(nt) + \mathrm{i}\sin(nt), \qquad e^{-\mathrm{i}nt} = \cos(nt) - \mathrm{i}\sin(nt),$$

on peut écrire aussi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right)$$

avec

$$a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ces dernières équations sont équivalentes à

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Proposition 29 *Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{\mathrm{i}nt}$ soit uniformément convergente. Soit $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}nt}$ sa somme. Alors on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt.$$

En notation trigonométrique on a : si $f(t)$ est la somme d'une série uniformément convergente

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right),$$

alors on a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

Pour la démonstration on pose

$$f(t)e^{\mathrm{i}mt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\mathrm{i}(n-m)t}.$$

Comme la série converge uniformément on peut intégrer terme à terme. On obtient

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}mt}dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n-m)t}dt = 2\pi c_m.$$

Définition 22 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-péridoique et continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

ou bien les nombres complexes

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La série de Fourier de la fonction f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

Exercices Démontrer les propriétés suivantes

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
2. Les a_n, b_n et c_n sont linéaires en f :

$$a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g), \quad b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g),$$

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g).$$

3. On peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π, par exemple par l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
4. Si f est paire alors $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = 0$.
5. Si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

6.2 Convergence de la série de Fourier

La série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ d'une fonction f est-elle convergente ? Si oui, sa somme est-elle égale à la fonction f. La réponse est donnée par le théorème suivant

Théorème 32 [Théorème de Dirichlet]. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f est simplement convergente et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt} = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & \text{si } f \text{ n'est pas est continue en } t \end{cases}$$

Si de plus f est continue alors la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}nt}$ est normalement, donc uniformément convergente et sa somme est égale à $f(t)$.

On a aussi le résultat suivant qui est vrai même si la fonction f est seulement continue par morceaux.

Théorème 33 [Formule de Parseval]. *Si f est continue par morceaux on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

6.3 Fonctions T-périodiques

Définition 23 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-péridoique et continue par morceaux. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}dt, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

ou bien les nombres complexes

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt, \qquad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

La série de Fourier de la fonction f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n(f)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n(f)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right).$$

Le théorème de Dirichlet est vrai. La formule de Parseval devient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2dt,$$

Chapitre 7

Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

7.1 Convergence simple et convergence uniforme

Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, une fonction, avec $a < b \leq +\infty$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$ la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur $[a, b[$, de sorte que l'intégrale $\int_a^c f(t, x)dt$ a un sens pour tout $c \in [a, b[$. On se propose d'étudier la limite, lorsqu'elle existe, de cette intégrale lorsque c tend vers b.

Définition 24 *On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t, x)dt$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$ $\lim_{c\to b, c<b} \int_a^c f(t, x)dt$ exite et est finie. Dans ce cas on note*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)dt = \lim_{c\to b, c<b} \int_a^c f(t, x)dt.$$

Par conséquent

$$F(x) \text{ converge simplement sur } I \Leftrightarrow \lim_{c\to b, c<b} \left| \int_c^b f(t, x)dt \right| = 0.$$

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t, x)dt$ converge uniformément sur I si

$$\lim_{c\to b, c<b} \sup_{x\in I} \left| \int_c^b f(t, x)dt \right| = 0.$$

7.2 Continuité, intégration et dérivabilité

Théorème 34 *Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a, b[\times I$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x)$ est uniformément convergente sur I alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x)$ est continue sur I.*

Théorème 35 *Soit $f : [a, b[\times[c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a, b[\times I$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x)dt$ est uniformément convergente sur $[c, d]$ alors on a*

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(t, x)dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(t, x)dx \right] dt.$$

Théorème 36 *Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a, b[\times I$. On suppose que la dérivées partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$ est continue sur $(a, b[\times I$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x)$ est convergente sur I et si l'intégrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ est uniformément convergente sur I alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t, x)$ est dérivable sur I et on a*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt.$$

7.3 Convergence dominée

Une condition suffisante (et pas nécessaire) pour que l'intégrale $\int_a^b f(t,x)dt$ soit uniformément convergente sur I est que $|f(t,x)|$ soit majorée, pour tout $x \in I$, par une fonction $g(t)$ qui soit intégrable sur $[a,b[$, c'est à dire telle que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge. En effet dans ce cas on a

$$\lim_{c\to b, c<b} \sup_{x\in I} \left| \int_c^b f(t,x)dt \right| \leq \lim_{c\to b, c<b} \int_c^b g(t)dt = 0.$$

Par conséquent on a

Proposition 30 *S'il existe $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $x \in I$ on a $|f(t,x)| \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t,x)dt$ est uniformément convergente sur I.*

Théorème 37 *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a,b[\times I$. S'il existe $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $x \in I$ on a $|f(t,x)| \leq g(t)$ alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t,x)$ est continue sur I.*

Théorème 38 *Soit $f : [a,b[\times[c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a,b[\times I$. S'il existe $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $x \in I$ on a $|f(t,x)| \leq g(t)$ alors on a*

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(t,x)dt \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(t,x)dx \right] dt.$$

Théorème 39 *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $(a,b[\times I$. On suppose que la dérivées partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ est continue sur $(a,b[\times I$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t,x)$ est convergente sur I et s'il existe $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $x \in I$ on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t)$ alors la fonction $F(x) = \int_a^b f(t,x)$ est dérivable sur I et on a*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

7.4 La fonction Γ d'Euler

On considère la fonction

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

définie pour $x > 0$. Comme cette intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$, sa convergence équivaut à la convergence des deux intégrales

$$F_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

1. Montrer que l'intégrale F_1 est convergente si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que l'intégrale F_2 est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction Γ est continue.
4. Montrer que la fonction Γ est dérivable et que sa dérivée est

$$\Gamma'(x) = \int_a^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}.$$

5. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Gamma(n+1) = n!$.

Chapitre 8

Equations différentielles

8.1 Méthodes classiques d'intégration

8.2 Théorème de Cauchy-Lipshitz

8.3 Systèmes linéaires

8.4 Equations linéaires d'ordre n

Table des matières