Université de Haute Alsace
FST – L2 Math.
Année universitaire 2005-2006

Examen de Séries et intégrales généralisées (mai 2006, durée 3h00)

Exercice 1. *3 points*
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Exercice 2. *4 points*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x^2$ si $x \in]-\pi, \pi]$.
1) Dessiner le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2) Écrire la série de Fourier de f et déterminer sa somme. En déduire la somme de chacune des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3) Rappeler l'identité de Parseval, puis calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 3. *3 points*
On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)n^{2n}}$.
1) Montrer que le rayon de convergence de cette série est égal à $R = \dfrac{e^2}{3^3}$.
2) Calculer la limite, lorsque $n \to +\infty$, de $a_n R^n$.
Indication : utiliser la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.
3) Etudier la convergence de la série sur la frontière du disque de convergene.

Exercice 4. *4 points*
1) Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + xy(x) = 1 \tag{1}$$

sont $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2}} + f(x)$, où A est une constante réelle et f est la fonction définie par

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt. \tag{2}$$

2) Chercher le développement en série entière, au voisinage de l'origine, des solutions de l'équation différentielle (1). En déduire le développement en série entière de la fonction f, définie par (2).

Problème. *16 points*
1) Soit $a > 0$. Démontrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1+t^2}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}dt$$

sont convergentes.
2) Démontrer que la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt, \quad \text{où} \quad f(t,x) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}, \tag{3}$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
3) Démontrer que la fonction F, définie par (3), est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.
Indication : montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout $x \geq a > 0$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2},$$

et utiliser le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
4) Démontrer que pour tout $x > 0$ les intégrales

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt \quad \text{et} \quad B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$$

sont convergentes et que $\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} B(x) = 0$.
5) Montrer que

$$\lim_{x\to 0} A(x) \text{ existe et } \lim_{x\to 0} xB(x) = 0. \tag{4}$$

6) Démontrer que pour tout $x > 0$ on a

$$A''(x) = B'(x) + \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{et} \quad B''(x) = -A'(x) + \frac{\cos x}{x^2}.$$

En déduire que la fonction $G(x) = \cos x A(x) - \sin x B(x)$ est une solution particuilière de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}. \tag{5}$$

Montrer que les solutions de cette équation différentielle sont

$$y(x) = K\cos x + L\sin x + \cos x A(x) - \sin x B(x), \quad \text{avec} \quad K \text{ et } L \text{ constantes}.$$

7) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et, en utilisant le résultat démontré dans la question 4, qui affirme que la fonction F est une solution de l'équation (5), en déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$F(x) = \cos x A(x) - \sin x B(x). \tag{6}$$

8) En utilisant la continuité de F en $x = 0$ (question 1) et les formules (4) et (6) démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Bon courage ! Noter que le barême est sur 30.