Université de Haute Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n° 1
Groupes, anneaux, corps
Borne supérieure

Notation : $x^n = x^{n-1} * x$, $n \geqslant 2$; $x^{p+q} = x^p * x^q$, $(x^p)^q = x^{pq}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. On considère sur $\mathbb{N}$ la loi de composition interne $*$ définie par $a * b = a^2 + b^2$. Cette loi est-elle commutative ? associative ? munie d'un élément neutre ?

Exercice 2. Soient $(G, *)$ un groupe et $x, y \in G$ tels que $x * y = y * x$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $(x * y)^n = x^n * y^n$.

Exercice 3. Soient $(G, *)$ un groupe et $x, y, z \in G$. Montrer que

i) $x * y = x * z \Rightarrow y = z$

ii) $y * x = z * x \Rightarrow y = z$

iii) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Exercice 4. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau non commutatif. On considère sur A la loi de composition interne $*$ définie par $x * y = x \cdot y - y \cdot x$.

a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $+$.

b) Montrer que $x * y = -y * x$.

c) Montrer que $x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$ et $x * (y * z) - (x * y) * z = (z * x) * y$.

Exercice 5. Soit G un groupe. On suppose que pour tout $x \in G$, on a $x^2 = 1$.

a) Montrer que pour tout $x \in G$, $x = x^{-1}$.

b) Montrer que le groupe G est commutatif.

Exercice 6. Soit G un groupe. On pose $H = \{x \in G | \ xy = yx, \ \ \forall y \in G\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de G.

Exercice 7. On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, \ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ muni des opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ est un anneau.

b) Montrer que $3 + 2\sqrt{2}$ est inversible et calculer $(3 + 2\sqrt{2})^{-1}$.

c) Montrer qu'il existe une infinité d'éléments inversibles.

Exercice 8. On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ définie par $x * y = x + y - xy$.

a) $\mathbb{R}$ est-il un groupe pour $*$?

b) Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif. Calculer $x^{(n)}$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ des lois de compositions internes $+$ et $*$ définies par $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b)$. Montrer que $(\mathbb{Q}^2, +, *)$ est un corps.

Exercice 10. Soient deux groupes $(G, *)$ et $(G', *')$ et f un morphisme de $(G, *)$ dans $(G', *')$.

a) Montrer que $(f(G), *')$ est un groupe.

b) Sur G, on définit la relation $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi de G. En déduire que l'ensemble des classes d'équivalence, appelé ensemble quotient et noté $G/\mathcal{R}$, est un groupe pour la loi quotient (que l'on notera encore $*$).

Exercice 11. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que la borne supérieure de A est l'unique nombre réel tel que :

i) si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$

ii) pour tout $t < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $t < x$.

Exercice 12. Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R}, \ \ x = \frac{n}{n+2}, \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Trouver $\sup A$.

Exercice 13. Soit $A = \{x = (-1)^n + \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}\}$. Trouver $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 14. Soit A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que si B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leqslant \sup B$.

Exercice 15. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{x \in \mathbb{R}, \ \exists a \in A, \ \exists b \in B, \ x = a + b\}$.
Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.