Université de Haute Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n°2
Corps des nombres réels
Groupes

Exercice 1. La partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est l'unique entier relatif tel que

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1.$$

a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

i) $x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$.

ii) $E(x)+E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x)+E(y)+1$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \frac{2}{u_{n-1}} + 1, \ n \geqslant 1. \end{cases}$$

a) En cas de convergence, quelle est la valeur de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}.$$

que l'on appelle *moyenne de Cesàro*. On veut montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers 0.

a) On fixe $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\ldots+u_n}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Montrer ensuite qu'il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on ait :

$$\left|\frac{u_1+u_2+\ldots+u_{n_0-1}}{n}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Démontrer le résultat annoncé.

d) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit f un morphisme de groupes de G (d'élément neutre e) dans G' (d'élément neutre e'). Montrer que :

- $f(e) = e'$
- $\forall x \in G, \ \ (f(x))^{-1} = f(x^{-1})$
- $\forall x \in G, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ \ (f(x))^n = f(x^n)$

(pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$).

Exercice 5. Soit f un morphisme de groupes de G (d'élément neutre e) dans G' (d'élément neutre e'). Montrer que :

- si H' est un sous-groupe de G', alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G
- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$, où $\mathrm{Ker}(f)$, appelé le noyau de f, est défini par $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{e'\})$.

Exercice 6. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs multiples de a. Montrer que $H \subset \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soient G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

a) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. On note $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

b) Montrer que si $a > 0$, alors $a \in G$ et $G = a\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x < y$, il existe $z \in G$ tel que $z \in [x, y]$).