Université de Haute Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n°3
Groupes des isométries et des permutations. Suites

Exercice 1
Une isométrie du plan xOy est une application qui conserve les distances. Soit f une isométrie du plan.

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f conserve les milieux des segments.
3. Soit ABC un triangle et f, g deux isométries du plan. Alors $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$ implique $f = g$.
4. La composition de deux isométries du plan est une isométrie.

Exercice 2
Soient $A_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{4}, \sin\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$ les sommets d'un carré dans le plan xOy. Soient s la réflexion d'axe Ox et r la rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que s et r sont des isométries.
2. On note $Is(P_4) = \left\{id, r, r^2, r^3, s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s\right\}$, où $\circ$ est la composition de deux isométries et $r^2 = r \circ r$, etc. Calculer $f(A_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, $f \in Is(P_4)$.
3. Montrer que l'ensemble des isométries f telle que $\{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{f(A_0), f(A_1), f(A_2), f(A_3)\}$ est un sous-groupe non commutatif des isométries.

Exercice 3
Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. Soient $s, t \in \mathcal{S}_3$ définies par $s(1) = 2$, $s(2) = 3$, $s(3) = 1$ et $t(1) = 2$, $t(2) = 1$, $t(3) = 3$. Montrer que les six éléments de $\mathcal{S}_3$ sont $\left\{id, s, s^2, t, s \circ t, t \circ s\right\}$.

Exercice 4
Soit $s \in \mathcal{S}_4$ définie par $s(1) = 3$, $s(2) = 1$, $s(3) = 4$, $s(4) = 2$.

1. Calculer s^{-1}, s^2, s^3, s^4.
2. Montrer que $\left\{id, s, s^2, s^3\right\}$ est un sous groupe de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 5
Étudier $\lim_{n\to\infty} a^n$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6
Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$.

Exercice 7
Étudier $\lim_{n\to\infty} n^p a^n$, où $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8
Soit $0 < L < 1$ et soit (u_n) une suite. Supposons que pour tout n, on a $u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L$. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 9
Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ si $a > 0$.

Exercice 10
Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque u_n est égal à :
i) $\cos\frac{2^n}{n!}$ ii) $\sqrt[n]{3 - \sin^2 n}$ iii) $\frac{n^3+2^n}{3^n}$ iv) $\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$ v) $(\cos n)\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 11
Posons $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1\cdot 3}{4^2 2!}$ et pour tout $n \geq 3$, $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4^n n!}$. Démontrer l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$. En déduire la limite de (u_n).