Université de Haute-Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n°4
Fonctions d'une variable réelle
Limite - Continuité

Exercice 1. Etudier les limites suivantes :

i) $\dfrac{x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ en $+\infty$. *ii)* $\dfrac{e^{5x}+5}{5e^{3x}+2}$ en $+\infty$. *iii)* $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$.

iv) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ en 4. *v)* $\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x$ en $+\infty$.

Exercice 2. **a)** Montrer que la fonction $f(x)=\cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x)}{x}=0$.

c) Etudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 2\\ a-\dfrac{b}{x} & \text{si } 2<x\leqslant 4\\ 1 & \text{si } x>4.\end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que cette fonction soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. **a)** Etudier et représenter graphiquement la fonction $f(x)=x-E(x)$.

b) Pour quelles valeurs du réel a la fonction $g(x)=(x-E(x))(x-E(x)-a)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Quel est alors son graphe ?

Exercice 5. Montrer que toute fonction f périodique qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 6. **a)** Etudier les limites en 0 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$:

i) $f_0(x)=E\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *ii)* $f_1(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *iii)* $f_2(x)=x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Quels sont les points où f_2 est continue ? Donner les limites de f_2 à droite et à gauche en un point de discontinuité.

Exercice 7. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Déterminer f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Q}$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. **a)** Soit f une fonction continue sur un segment $I=[a,b]$ tel que $f(I)\subset I$. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

b) Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 10. **a)** Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f a une limite à droite en 0, une limite à gauche en 1 et des limites à droite et à gauche en tout point $x_0\in]0,1[$.

b) Montrer qu'une fonction f croissante et surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est continue.

c) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ soit décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11. Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.