

Feuille d'exercices n°5
Dérivée d'une fonction

Exercice 1

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\exp f(x), \quad (f(\sin x))^2, \quad \log f(\sin x).$$

Exercice 2

Rappelons que l'on note E la fonction partie entière. Les fonctions $x \mapsto xE(x)$ et $x \mapsto x^2E(x)$ sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 3

Soit a un nombre réel et soit $f(x) = \frac{1}{x-a}$. Montrer que la dérivée n -ième est

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

Exercice 4

Posons $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$. Déterminer des nombres réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

En déduire une expression de la dérivée n -ième.

Exercice 5

1. Montrer que l'on a $x \cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Etudier le sens de la variation de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' est bornée. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+|x|}$ est bornée.

Exercice 7

Soient $a < b$ deux nombres réels et soient f et g des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que f et g sont continues et dérivables sur $]a, b[$ et que $g'(x) \neq 0$ pour $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) - g(a) \neq 0$ pour $x \in]a, b[$.
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Soit $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = f(x) - pg(x)$. Montrer que $u(a) = u(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
3. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$