Université de Haute-Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n°6
Espaces vectoriels, applications linéaires
Formules de Taylor

Exercice 1.

a) Dans l'ensemble E des suites (u_n) à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ (en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on pose $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n)$ et $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que cet ensemble E est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

b) On dit qu'une suite (u_n) de E satisfait une récurrence linéaire d'ordre p s'il existe des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \ldots + a_p u_n. \tag{1}$$

Si de plus, on ajoute une constante b à la fin de cette formule, on dira récurrence affine.

1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{E}$ des suites récurrentes d'ordre p vérifiant la relation (1) est un sous-espace vectoriel de E.

2) On définit l'application $L : \mathbb{E} \to \mathbb{K}^p$ par

$$L(u) = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}).$$

Montrer que L est un isomoprphisme d'espace vectoriel. En déduire que la dimension de $\mathbb{E}$ est p.

3) On appelle équation caractéristique de la récurrence linéaire, l'équation :

$$x^p = a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \ldots + a_{p-1} x + a_p.$$

Montrer, dans le cas $p = 2$, que si l'équation caractéristique admet p racines distinctes r_1, r_2, $\ldots$, r_p, alors les p suites géométriques de raison r_i forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$.

c) On considère la suite de Fibonacci (F_n) et la suite de Lucas (L_n) définies par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_0 = 1, \\ L_1 = 3, \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \end{cases}$$

Exprimer les suites (F_n) et (L_n) en fonction de n. Trouver une relation entre (F_n) et (L_n).

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel E des fonctions $f(x)$ d'une variable réelle définies sur un intervalle $[-a, +a]$, que peut-on dire de l'ensemble P des fonctions paires et de l'ensemble I des fonctions impaires ?

Exercice 3. Calculer la limite quand x tend vers 0 de

$$i) \ \frac{a^x - b^x}{x}, \quad (a > 0, \ b > 0),$$

$$ii) \ (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}},$$

$$iii) \ \frac{\sin x + \operatorname{sh} x - 2x}{\ln(1+x^5)},$$

$$iv) \ \frac{(1+x)^x - (1-x)^{-x}}{\sin^3 x \cos^2 x}.$$

Exercice 4. Calculer la limite quand x tend vers l'infini de

$$y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}.$$

Exercice 5. On considère la fonction $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1 + \cos(x))$. Montrer que pour $x \neq 0$, on a :

$$\ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{12} < f(x) < \ln 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96}.$$

On utilisera la formule de Taylor avec reste de Lagrange.