

Feuille d'exercices n°7
Espaces vectoriels

Exercice 1

Soient $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \sin^2 x$, $h(x) = 1$ les éléments de l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que h est une combinaison linéaire de f et g .

Exercice 2

Soient les vecteurs $f_1 = (3, 5)$ et $f_2 = (4, 7)$ dans \mathbb{R}^2 . Montrer que f_1, f_2 est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 et calculer les coordonnées du vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dans cette base.

Exercice 3

Parmi les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^4 , préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 3x - y + t = 0\}$
2. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z + t = 1\}$
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + t = 0, 2x + y - z = 0\}$

Exercice 4

Considérons les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 .

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y - 2t = 0, x + t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - z + t = 0, y + z = 0\}$$

1. Trouver une base de F et une base de G .
2. Les sous-espaces F et G de \mathbb{R}^4 sont-ils supplémentaires ?

Exercice 5

Considérons les vecteurs de \mathbb{R}^4 . Est-ce que les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ? Trouver une base du sous-espace engendré par les vecteurs suivants.

1. $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 4, 5)$, $u_3 = (1, 2, -4, -2)$, $u_4 = (2, 3, 4, 5)$, $u_5 = (1, 1, 0, 1)$.
2. $u_1 = (1, 2, 3, 1)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (2, 2, 1, 3)$.

Exercice 6

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, t) = (x - y - 2t, x + t)$. Trouver une base pour $Im f$ et pour $Ker f$.