Université de Haute-Alsace
L1 - Théorèmes fondamentaux d'analyse et d'algèbre

Feuille d'exercices n°8
Intégration - Déterminants

Exercice 1. Calculer $\int_{-1}^{2} x|x|dx$ et $\int_{-1}^{1} x|x|dx$.

Exercice 2 : Théorème de la moyenne – Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ $(a<b)$ telles que g garde un signe constant.

a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [a,b], \quad mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

b) En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

c) Montrer que l'on peut trouver c vérifiant la condition ci-dessus dans $]a,b[$. (Indication : traiter le cas où f est constante sur $[a,b]$ puis le cas où f n'est pas constante sur $[a,b]$)

Exercice 3. Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ avec $a<b$. On définit la "valeur efficace" de f sur $[a,b]$ par la formule

$$f_e = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^2 dx}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant f_e.$$

Exercice 4. Calculer les limites des suites suivantes :

i) $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right).$

ii) $u_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right).$

iii) $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right) + \ldots + \left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}.$

Exercice 5. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Calculer les déterminants suivants ($(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$) :

$$i)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \qquad ii)\ \begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{vmatrix}$$

$$iii)\ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad iv)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 7. Soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. On appelle matrice de Vandermonde associée aux réels $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ la matrice définie par

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & \ldots & (x_n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_0)^n & (x_1)^n & \ldots & (x_n)^n \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\det V = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$