Université de Haute Alsace
FST – L1 Math. Info.
Année universitaire 2005-2006

Examen de Théorèmes fondamentaux
(mai 2006, durée 3h)

ALGEBRE

Exercice 1. *4 points*
Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $u = (u_n)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient a et b des nombres complexes et

$$F = \{u = (u_n) \in E : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) Démontrer que l'application $L : F \to \mathbb{C}^2$ définie par $L(u) = (u_0, u_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de F.
3) Soit $r \neq 0$ un nombre complexe. Montrer que la suite géométrique r^n appartient à F si et seulement si $r^2 = ar + b$.
4) On pose $a = 2$, $b = -5$. Trouver des nombres complexes α et β tels que les suites géométriques α^n et β^n forment une base de F.

Exercice 2. *3 points*
Pour $n \geq 2$, on considère le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n dont les éléments diagonaux sont égaux à 2 et dont les élements situés immédiatement au dessus ou au dessous de la diagonale sont égaux à -1, tous les autres éléments étant nuls. Ainsi pour $n = 2, 3, 4...$ on a :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

1) Calculer D_2 et D_3 et D_4.
2) Développer le déterminant D_n par rapport à sa première colonne, et en déduire que pour tout $n \geq 3$ on a $D_{n+1} = 2D_n - D_{n-1}$. Calculer D_n.

Exercice 3. *3 points*
Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que U est un sous groupe de $\mathbb{C}$ pour la multiplication. Montrer que l'application $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, définie par $f(z) = z^2$ est un morphisme surjectif de groupes.

ANALYSE

Exercice 1. *2 points*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$f \text{ dérivable en } x_0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0).$$

Montrer que la réciproque est fausse, c'est à dire que la limite (on pourra considérer la fonction $f(x) = |x|$, avec $x_0 = 0$).

Exercice 2. *3 points*
Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c(x) \in]x, x+1[$ tel que

$$e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{c(x)^2} e^{\frac{1}{c(x)}}.$$

Démontrer que $e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\frac{1}{c(x)}} < e^{\frac{1}{x}}$ et en déduire la limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$$

.

Exercice 3. *2 points*
Soit $x > 0$. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre n, avec reste de Lagrange, pour la fonction $f(x) = e^x$, sur l'intervalle $[0, x]$. En déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 4. *3 points*
On considère la suite u_n définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{\pi}{n} + 2\cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + n\cos\frac{n\pi}{n}\right)$.
Démontrer que

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

où $f(x) = x\cos(\pi x)$ et en déduire la limite de la suite u_n quand n tend vers l'infini.

Bon courage ! La clarté et la précision de la rédaction
seront particulièrement appréciées du correcteur (la concision aussi).