T.Sari, M.Mbaye

2006-2007

1. Si $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$. Montrer que pour tout $a > 0$, on a :
$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F(\frac{\xi}{a}).$$
2. Soit f une fonction absolument intégrable telle que $f(\infty) = 0$, montrer que
$$\mathcal{F}[f'] = i\xi\mathcal{F}[f].$$
3. Trouver la transformée de Fourier de f :
$$f(x) = 1\,\mathrm{si}\,|x| < a\,\mathrm{et}\,f(x) = 0\,\mathrm{si}\,|x| > a.$$
4. Trouver la transformée de Fourier en cosnis de
$$f(x) = \exp(-mx), \quad m > 0.$$
Utiliser le résultat pour montrer que :
$$\int_0^\infty \frac{\cos(px)}{x^2+q^2}dx = \frac{\pi}{2q}\exp(-pq) \quad (p > 0, q > 0).$$
5. Si $f(x) = 1\,\mathrm{si}\,0 \leq x \leq 1\,\mathrm{et}\,f(x) = 0\,\mathrm{si}\,x > 1$. Trouver la transformée de Fourier en sinus et en cosinus de $f(x)$.
6. Soit $f(x) = \exp(-x^2)$, trouver la transformée de fourier de f.
7. Montrer que pour tout réel ξ, la fonction :
$$u(x,t,\xi) = \frac{1}{2a\sqrt{(\pi t)}}\exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t})$$
est une solution de l'équation de la chaleur $u_t = a^2u_{xx}$.
8. En utilisant la transformée de Fourier résoudre le problème suivant :
$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \quad t > 0, \, -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = \exp(-x^2), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$
9. Montrer que l'équation des ondes $u_{tt} = a^2u_{xx}$ est équivalente à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$ avec $\xi = x - at, \quad \eta = x + at$. En déduire que la solution générale de l'équation des ondes s'écrit :
$$u(x,t) = v(x+at) + w(x-at),$$
avec v et w des fonctions arbitraires.