INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES ET APPLICATIONS À UN MODÈLE COSMOLOGIQUE

TEWFIK SARI

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps. On suppose que l'état d'un système, à un instant donné, peut être représenté par un élément x d'un espace d'état X. L'espace X est de dimension finie (un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement une variété différentiable). L'évolution du système est décrite par un système différentiel sur X qu'on écrira

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \in X \tag{1}$$

où $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur X. Ainsi, (1) représente un système autonome d'équations différentielles ordinaires. La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de Poincaré, à la fin du 19ème siècle, sur le problème des trois corps [4]. Poincaré a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système (donnée par exemple par des conditions initiales ou des conditions aux limites), d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace des états. Voici ce qu'il dit dans l'introduction de son *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, publié en 1881 (pour plus d'informations voir [3, 4]) : "*Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprises entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres...*". Par la suite, dans les années 1920, avec les travaux de Birkhoff et d'autres, s'est dégagée la notion de système dynamique abstrait, de flot, d'ensembles limites... Le but de ce cours [1] est d'exposer ces notions et de les utiliser pour établir les propriétés qualitatives de certains sytèmes dynamiques en cosmologie. La présentation suit les chapitres 4 et 6 de [11]. Pour les démonstrations et plus d'informations sur les la théorie des équations différentielles et des systèmes dynamiques le lecteur peut consulter [5, 6, 7, 9]. Pour d'autres applications en mécanique céleste le lecteur peut consulter [2, 8]. Pour plus d'informations sur les théories cosmologiques le lecteur peut consulter [1, 10, 11, 13].

Date: 5 juin 2006.

[1] Ce texte est une version remaniée des notes du cours donné dans l'Ecole CIMPA-UNESCO-ALGERIE *Géométrie, dynamique riemannienne et pseudo-riemannienne et applications*, El Oued, du 26 Février au 10 Mars 2005 (voir http://www.cimpa-icpam.org/Francais/AnciensProg/2005/Algerie05.html).

1. Systèmes différentiels et flots

On considére le système (1) et on suppose que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)).$$

On suppose que la fonction f est différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur X. Alors, (1) represente un système de n équations différentielles ordinaires

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n), \qquad i = 1, \cdots, n, \qquad \text{où } x_i' = dx_i/dt,$$

Certains types de sytèmes sont d'un grand intérêt pour les applications.

Systèmes linéaires

Si $X = \mathbb{R}^n$ et f est une application linéaire, i.e. $f(x) = Ax$ où A est une matrice $n \times n$ à coefficents dans $\mathbb{R}$, alors on obtient le système linéaire

$$x' = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Systèmes hamiltoniens

Si $x = (q_1, \cdots, q_m, p_1, \cdots, p_m) \in X \subset \mathbb{R}^{2m}$ et $f(x) = (\partial H/\partial p, -\partial H \partial q)$, où $H : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, appelée *hamiltonien*, alors on obtient le système hamiltonien

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{3}$$

1.1. Théorèmes d'existence et d'uncité des solutions.

Une solution du système (1) est une fonction dérivable

$$t \mapsto x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)),$$

définie d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans X, telle que pour tout $t \in I$ on ait

$$x'(t) = f(x(t)).$$

L'image d'une solution est appelée une *orbite*. Une orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteurs f. Le domaine X est appelé l'*espace des phases*.

Soit $a \in X$. Le problème de *Cauchy* consiste en la détermination des solutions du système (1) satisfaisant la *condition initiale*

$$x(0) = a. \tag{4}$$

Théorème 1.1 (Existence et unicité locales)**.** *Il existe $\delta > 0$ et une unique solution du problème de Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = a$. définie sur $]-\delta, \delta[$.*

La solution locale dont l'existence est garantie par ce théorème peut être définie sur un intervalle maximal $]t_{min}(a), t_{max}(a)[$, dépendant du point initial $a \in X$. On note par $x(t, a)$ cette solution maximale, pour rappeler sa dépendance en a. Lorsque t tend vers les extrémités de l'interval maximal de définition, alors $(t, x(t, a))$ sort de tout compact inclus dans $\mathbb{R} \times X$. Ce résultat s'utilise dans la pratique de la manière suivante.

Théorème 1.2 (Continuation des solutions)**.** *Si une solution reste dans un compact de X alors elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $t_{min}(a)$ est fini alors lorsque t tend vers $t_{min}(a)$, la solution $x(t, a)$ tend vers la frontière de X (ou bien vers l'infini). Le résultat est vrai aussi pour la limite en $t_{max}(a)$.*

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Si $X = \mathbb{R}^n$ et $\|f(x)\|$ ne croit pas trop vite quand $\|x\| \to \infty$ (par exemple si elle est bornée ou bien s'il existe une constante positive M telle que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$), alors toute solution du système $x' = f(x)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc toujours diviser le champ de vecteurs $f(x)$ correspondant au système (1) par une fonction $\lambda(x) > 0$ de telle sorte que les orbites ne changent pas et que les solutions du système $x' = f(x)/\lambda(x)$ soient définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il suffit de prendre $\lambda(x) = 1 + \|f(x)\|$.

On suppose dorénavant que les solutions du système (1) sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.2. **Le flot d'un système différentiel.**

Définition 1.3. *Le flot du système différentiel (1) est la famille à un paramètre d'applications $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de X dans lui même définies par*

$$\phi_t(a) = x(t, a), \qquad \text{pour tout } a \in X,$$

où $x(t, a)$ est l'unique solution du problème de Cauchy (1,4).

Le théorème suivant affirme que le flot est un groupe à un paramètre de difféomorphismes.

Théorème 1.4. *Le flot $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{lll} \phi_0 = Id & & (Id \text{ est l'identité de } X) \\ \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2} & \text{pour tous } t_1, t_2 \in \mathbb{R} & (\text{Loi de composition}) \end{array}$$

Du théorème précédent on déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de X et que

$$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}.$$

Bien que l'on ait, par définition, $\phi_t(a) = x(t, a)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in X$, il ne faut pas confondre le flot $\phi_t(a)$ et la solution $x(t, a)$. Conceptuellement

- Pour chaque $a \in X$, la solution $x(\cdot, a) : \mathbb{R} \longrightarrow X$ donne l'état du système $x(t, a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tel que $x(0, a) = a$.
- Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, le flot $\phi_t : X \longrightarrow X$ donne l'état du système $\phi_t(a)$ à l'instant t, pour tout $a \in X$.

Par définition du flot on a

$$\frac{d}{dt}\phi_t(a)|_{t=0} = f(a). \tag{5}$$

Cette formule montre que la donnée du flot ϕ_t définit le système (1). Le théorème suivant affirme que les solutions d'un système dépendent de manière différentiable en les conditions initiales.

Théorème 1.5 (Différentiabilité du flot)**.** *L'application ϕ_t est différentiable sur X.*

1.3. **Systèmes dynamiques.** Jusqu'à présent nous avons utilisé le vocable "système dynamique" dans un sens informel pour désigner un système physique qui évolue dans le temps. Formellement, on peut définir un système dynamique de la manière suivante.

Définition 1.6. *Soit X un espace métrique. Un système dynamique sur X est la donnée d'une famille à un paramètre d'homéomorphismes $\phi_t : X \longrightarrow X$ vérifiant les conditions $\phi_0 = Id$ et $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.*

Dans la littérature, un tel système dynamique est souvent appelé *système dynamique continu*. Le terme *système dynamique discret* désigne la donnée d'une famille d'applications $\{g^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ engendrée par les itérations d'un homéomorphisme $g : X \to X$, c'est à dire $g^2 = g \circ g$ et g^{-1} est l'inverse de g.

Du Théorème 1.4 on déduit que le flot ϕ_t associé au système (1) sur X est un système dynamique sur X. Ainsi le système (1) définit un système dynamique ϕ_t et vice versa. Le flot ϕ_t engendre un système dynamique discret défini par $g = \phi_t$, où t est une valeur fixée du temps.

Pour un système linéaire (2), le flot est donné par

$$\phi_t(a) = \mathrm{e}^{tA}a. \tag{6}$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série

$$\mathrm{e}^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots \tag{7}$$

1.4. **Orbites et ensembles invariants.**

Définition 1.7. *Etant donné un système (1) et le flot associé ϕ_t sur X, l'orbite d'un point $x_0 \in X$ est l'ensemble*

$$\gamma(x_0) = \{x \in X : \exists t \in \mathbb{R}\; x = \phi_t(x_0)\}.$$

Les points d'équilibres (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un rôle important dans la description des propriétés du système.

Définition 1.8. *Un point x_0 est un dit* point d'équilibre *du système (1), s'il satisfait $f(x_0) = 0$ ou bien de manière équivalente si $\phi_t(x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sinon le point x_0 est dit ordinaire.*

De la définition 1.7 on déduit que l'orbite d'un point d'équilibre est réduite au point lui même :

$$\gamma(x_0) = \{x_0\}.$$

Par contre l'orbite d'un point ordinaire est une courbe lisse qui admet en chacun de ses points le vecteur f comme vecteur tangent. Parmi les points ordinaires on distingue les points périodiques et les points récurrents.

Définition 1.9. *Un point ordinaire x_0 est un dit* périodique*, s'il existe $T > 0$ tel que $\phi_T(x_0) = x_0$. Un point ordinaire x_0 et non périodique, est dit récurrent si pour tout voisinage V de x_0 et tout $T \in \mathbb{R}$ il existe $t > T$ tel que $\phi_t(x_0) \in V$.*

Si le système possède un point périodique x_0, alors la solution correspondante $x(\cdot, x_0)$ est périodique. Si le système possède un point récurrent x_0, alors la solution correspondante $x(\cdot, x_0)$ repasse arbitrairement près de x_0 pour des temps suffisamment grands.

Définition 1.10. *Une orbite $\gamma(x_0)$ telle qu'il existe deux points d'équilibre a et b vérifiant $\lim_{t\to+\infty}\phi_t(x_0) = a$ et $\lim_{t\to-\infty}\phi_t(x_0) = b$ est dite* orbite hétérocline *si $a \neq b$ et* orbite homocline *si $a = b$.*

Définition 1.11. *Un ensemble $S \subset X$ est dit invariant par le flot ϕ_t sur X (ou bien par le système $x' = f(x)$ correspondant) si pour tout $x \in S$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\phi_t(x) \in S$. Si S vérifie la propriété que $\phi_t(x) \in S$ pour tout $x \in S$ et tout $t > 0$ alors on dit que S est positivement invariant.*

Si S est invariant et $x \in S$ alors l'orbite $\gamma(x)$ est incluse dans S. Par conséquent un ensemble invariant est une réunion d'orbites. On obtient des ensembles invariants de la manière suivante.

Soit $Z : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On note

$$Z'(x) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

la dérivée de la fonction Z dans la direction du champ de vecteurs f. Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de Z et se note $L_f Z$. Soit ϕ_t le flot du système (1) on a

$$\frac{d}{dt} Z(\phi_t(x)) = Z'(\phi_t(x)), \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

Proposition 1.12. *S'il existe une fonction $Z : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Z'(x) = \alpha(x) Z(x)$ où $\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors les sous-ensembles de X définis par $Z > 0$, $Z = 0$ et $Z < 0$ sont invariants par le système (1).*

Si un ensemble positivement invariant M est homéomorphe à la boule de $\mathbb{R}^n$ alors il y a au moins un point d'équilibre dans M. Ce résultat est une conséquence du théorème du point fixe de Brouwer.

2. Comportement asymptotique

2.1. **Ensembles limites.**

Définition 2.1. *Soit ϕ_t un flot dans X et soit $a \in X$. Un point x est dans l'ensemble ω-limite $\omega(a)$ s'il existe une suite $t_k \to +\infty$ telle que $\phi_{t_k}(x) \to a$ lorsque $k \to +\infty$. Un point x est dans l'ensemble α-limite $\alpha(a)$ s'il existe une suite $t_k \to -\infty$ telle que $\phi_{t_k}(x) \to a$ lorsque $k \to +\infty$.*

Si a est un point d'équilibre alors $\omega(a) = \alpha(a) = \{a\}$. Si a est périodique alors $\omega(a) = \alpha(a) = \gamma(a)$. Si a et b sont dans la même orbite alors $\omega(a) = \omega(b)$ et $\alpha(a) = \alpha(b)$, de sorte que l'on définit les ensembles limites d'une orbite comme étant les ensembles limites de l'un de ses points. Si γ est une orbite hétérocline allant du point d'équilibre a au point d'équilibre b alors $\omega(\gamma) = \{b\}$ et $\alpha(\gamma) = \{a\}$.

Proposition 2.2. *Un ensemble limite est fermé et invariant. Si une orbite est positivement bornée alors son ensemble ω-limite est non vide, compact et connexe.*

L'ensemble ω-limite $\omega(a)$ d'un point a décrit le comportement asymptotique lorsque $t \to +\infty$ du système lorsque a est la condition initiale. Lorsqu'on veut décrire le comportement asymptotique futur du système avec une condition initiale arbitraire il faut examiner l'attracteur futur du système, qui est le plus petit ensemble qui attire presque toute les orbites.

Définition 2.3. *L'attracteur futur A^+ d'un flot sur X est le plus petit ensemble fermé invariant tel que $\omega(a) \subset A^+$ pour tout $a \in X$, sauf pour un ensemble de mesure nulle. L'attracteur passé A^- est défini de la même manière en remplaçant $\omega(a)$ par $\alpha(a)$.*

2.2. **Comportement asymptotique dans le plan.** Dans le plan, une orbite périodique (un cycle) entoure un point d'équilibre, puisque son intérieur est homéomorphe à la boule de dimension 2 et qu'il est invariant par le flot. Par ailleurs les ensembles limites sont bien décrits.

Théorème 2.4 (Poincaré-Bendixon)**.** *On suppose que le système n'a que des points singuliers isolés. Si une orbite est positivement bornée alors son ensemble ω-limite est soit un point sigulier, soit un cycle, soit une réunion de points singuliers et de courbes homoclines ou hétéroclines.*

Ce théorème admet un corollaire qui est souvent utilisé pour montrer l'existence d'orbites périodiques.

Théorème 2.5. *Si une orbite γ est positivement bornée et que $\omega(\gamma)$ ne contient pas de points d'équilibre alors $\omega(\gamma)$ est une orbite périodique.*

Si $\omega(\gamma) \neq \gamma$, alors γ spirale autour du cycle $\omega(\gamma)$ dans un certain sens et $\omega(\gamma)$ est appelé un *cycle limite*. La non existence de cycles (et même d'orbites homoclines) est garantie par le critère suivant.

Théorème 2.6 (Critère de Dulac-Bendixon)**.** *Considérons le système $x' = f(x)$ dans le plan. Si $\mathrm{div} f = \partial f_1/\partial x_1 + \partial f_2/\partial x_2$ ne s'annule pas dans une région Ω du plan alors Ω ne contient ni orbite périodique, ni orbite homocline.*

Comme corollaire du Théorème 2.6 on a le résultat suivant : s'il existe une fonction positive B sur Ω telle que $\mathrm{div} Bf$ garde un signe constant sur Ω, alors le système $x' = f(x)$ n'a pas de cycles dans Ω. En effet f et Bf ont les mêmes orbites. Une telle fonction B est appelée une fonction de Dulac.

2.3. **Principe de monotonie.** En dimension plus grande, les ensembles limites sont d'une grande complexité car les systèmes présentent en général des comportements chaotiques. Cependant, lorsque le système admet une fonction monotone, alors on peut décrire ses ensembles limites.

Définition 2.7. *Soit ϕ_t un flot et S un ensemble invariant. Une fonction continue $V : S \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée une fonction monotone pour le flot si pour tout $x \in S$, $V(\phi_t(x))$ est une fonction monotone de t.*

Si V est différentiable alors il suffit que sa dérivée V' le long du champ f ne s'annule pas.

Théorème 2.8 (Principe d'invariance de LaSalle)**.** *Soit le système $x' = f(x)$ de flot ϕ_t. Soit S un ensemble compact et positivement invariant de ϕ_t et V une fonction monotone différentiable sur S. Alors pour tout $a \in S$,*

$$\omega(a) \subset \{x \in S : V' = 0\}$$

Théorème 2.9 (Principe de monotonie)**.** *Soit le système $x' = f(x)$ de flot ϕ_t. Soit S un ensemble invariant de ϕ_t et Z une fonction strictement décroissante sur S à valeur dans l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Alors pour tout $x \in S$,*

$$\omega(x) \subset \{s \in \bar{S} \setminus S : \lim_{y \to s} Z(y) \neq b\},$$

$$\alpha(x) \subset \{s \in \bar{S} \setminus S : \lim_{y \to s} Z(y) \neq a\}.$$

3. Linéarisation

La première étape dans l'étude qualitative d'un système consiste en l'étude du système au voisinage de ses points d'équilibre. Considérons un système $x' = f(x)$ sur X et soit a un point d'équilibre (ainsi $f(a) = 0$). Le système linéaire

$$x' = Ax, \qquad \text{avec } A = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) \tag{8}$$

s'appelle le *linéarisé du système au point a.*

3.1. Systèmes linéaires.

Etant donné un système linéaire $x' = Ax$ dans $\mathbb{R}^n$, on considère les valeurs propres λ de la matrice A, qui sont complexes et non distinctes en général, et les sous espaces vectoriels carractéristiques associés E_λ. On définit

le *sous espace stable*	$E^s = \oplus_{\mathrm{Re}\lambda<0} E_\lambda$,
le *sous espace instable*	$E^u = \oplus_{\mathrm{Re}\lambda>0} E_\lambda$,
le *sous espace central*	$E^c = \oplus_{\mathrm{Re}\lambda=0} E_\lambda$.

Il est bien connu que

$$E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n$$

et que

$$w \in E^s \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{tA} w = 0, \qquad w \in E^u \Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{tA} w = 0.$$

Par conséquent toutes les solutions issues de conditions initiales dans le sous espace stable sont attirées vers l'origine tandis que celles issues de conditions initiales dans le sous espace instable sont repoussées par l'origine. En particulier, lorsque $E^s = \mathbb{R}^n$ toutes les solutions tendent vers l'origine qui est appelée un *puits*, et lorsque $E^u = \mathbb{R}^n$ toutes les solutions proviennent de l'origine qui est appelée une *source*. Si ni E^s, ni E^u n'est réduit à $\{0\}$, et que $E^c = \{0\}$ l'origine est appelée un *point selle*.

3.2. Théorème de Hartman-Grobman.

On se propose de comparer, dans un voisinage d'un point d'équilibre a, les solutions du système $x' = f(x)$, et celles de son linéarisé (8).

Définition 3.1. *Le point d'équilibre a du système $x' = f(x)$ est dit hyperbolique lorsque toutes les valeurs propres de la matrice $\partial f/\partial x(a)$ sont de partie réelle non nulle.*

Définition 3.2. *Deux flots ϕ_t et ψ_t sont dits topologiquement équivalents dans des voisinages de points déquilibre, s'il existe un homéomorphisme h qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire $h \circ \phi_t = \psi_t \circ h$.*

Théorème 3.3 (Hartman-Grobman)**.** *Considérons un système $x' = f(x)$, de flot ϕ_t. Si a est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de a sur lequel le flot ϕ_t est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en a.*

En d'autres termes le théorème signifie que dans le voisinage V d'un point d'équilibre, les orbites d'un système peuvent être déformées continuement dans les orbites de son linéarisé. En particulier, si toutes les valeurs propres du linéarié sont de partie réelle strictement négative, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \to +\infty$. De la même manière, lorsque toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \to -\infty$. Cette remarque justifie la définition suivante.

Définition 3.4. *Un point d'équilibre a d'un système $x' = f(x)$ est appelé un* puits *(resp. une* source*) si toutes les valeurs propres de la matrice $\partial f/\partial x(a)$ sont de partie réelle strictement négative (resp. positive). Un point d'équilibre hyperbolique qui n'est ni un puits, ni une source est appelé un* point selle.

3.3. **Variétés invariantes.** La *variété stable* W^s d'un point d'équilibre a du système $x' = f(x)$ est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable E^s du linéarisé (8) en a et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers a quand $t \to +\infty$. De même la *variété instable* W^u du point d'équilibre a est une variété différentiable qui est tangente au sous espace instable E^u et telle que toutes les solutions issues de W^s tendent vers a quand $t \to -\infty$. Enfin la variété centrale W^c est une variété tangente au sous espace central E^c. Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en a. Il y a unicité des variétés stable W^s et instable W^u, par contre il y a une infinité de variétés centrales.

Théorème 3.5 (Théorème de la variété centrale)**.** *Considérons un système admettant 0 comme point d'équilibre. Soient E^s, E^u et E^c les sous-espace stable, instable et central du linéarisé du système en 0. Alors le système admet des variétés invariantes W^s, W^u et W^c passant par le point 0 et tangentes respectivement aux sous-espaces E^s, E^u et E^c. Les solutions issues de W^s (resp. W^u) tendent exponentiellement vers 0 quand $t \to +\infty$ (resp. $t \to -\infty$). Le comportement des solutions dans la variété W^c est déterminé par les termes non linéaires.*

Théorème 3.6 (Théorème de réduction)**.** *Il existe un voisinage de 0 sur lequel le système est topologiquement équivalent au produit direct des deux équations suivantes : la restriction du système à la variété W^c et la "selle standard"*

$$x_s' = -x_s, \quad x_u' = x_u, \qquad x_s \in E^s, \qquad x_u \in E^u.$$

Exemple Considérons le système sur $\mathbb{R}^2$

$$x' = x, \qquad y' = -y + x^2. \tag{9}$$

L'origine est un point d'équilibre. Le linéarisé en ce point d'équilibre est

$$x' = x, \qquad y' = -y.$$

La fonction $Z(x,y) = y - x^2/3$ vérifie $Z' = -Z$. D'après la Proposition 1.12, la parabole $y = x^2/3$ est un ensemble invariant. On a (voir Fig. 1)

$$W^u = \{(x,y) : y = x^2/3\}, \quad E^u = \{(x,y) : y = 0\},$$
$$W^s = E^s = \{(x,y) : x = 0\}.$$

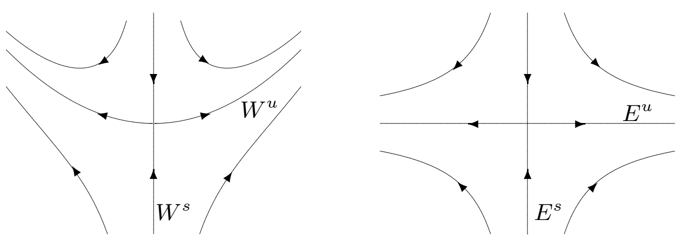

FIGURE 1. *Variétés invariantes du système (9) et de son linéarisé.*

Exemple Noeud-Col : Considérons le système dans le plan

$$x' = x^2, \qquad y' = -y \tag{10}$$

L'origine est un point d'équilibre. Le linéarisé en ce point d'équilibre est

$$x' = 0, \qquad y' = -y.$$

On a (voir Fig. 2)

$$W^s = E^s = \{(x, y) : x = 0\}, \qquad E^c = \{(x, y) : y = 0\}.$$

$$W^c = \{(x, y) : y = 0 \text{ si } x > 0,\ y = Ce^{1/x} \text{ si } x < 0\},$$

avec C une constante réelle. La variété centrale n'est pas unique. Elle n'est pas analytique, sauf si $C = 0$.

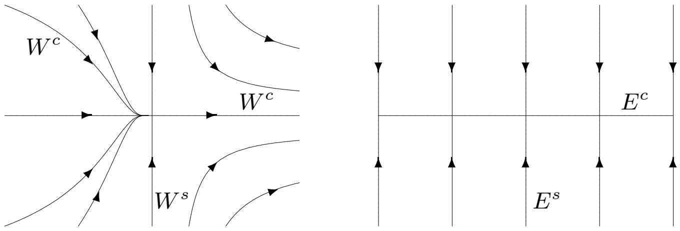

FIGURE 2. *Variétés invariantes du système (10) et de son linéarisé.*

4. MODÈLE COSMOLOGIQUE DE WAINWRIGHT ET HSU

4.1. **Cosmologies de Bianchi.** Une cosmologie de Bianchi est un modèle d'univers dont la métrique admet un groupe d'isométries de dimension 3 qui agit de manière simplement transitive sur les hypersurfaces de type espace, qui sont donc des surfaces d'homogénéité dans l'espace temps (pour les détails et des définitions précises, voir le capitre 1 de [11]). Ces cosmologies sont classifiées par leur algèbres de Lie des champs de Killing. Dans un système de coordonnées bien choisi, les équations d'évolution des cosmologies de Bianchi dites de classe A (voir le chapitre 6 de [11]) sont données par le système différentiel sur $\mathbb{R}^5$ suivant

$$\begin{array}{rcl} \Sigma'_+ & = & -(2-q)\Sigma_+ - \mathcal{S}_+ \\ \Sigma'_- & = & -(2-q)\Sigma_- - \mathcal{S}_- \\ N'_1 & = & (q - 4\Sigma_+)N_1 \\ N'_2 & = & (q + 2\Sigma_+ + 2\sqrt{3}\Sigma_-)N_2 \\ N'_3 & = & (q + 2\Sigma_+ - 2\sqrt{3}\Sigma_-)N_3 \end{array} \tag{11}$$

où

$$\mathcal{S}_+ = \frac{1}{6}\left[(N_2 - N_3)^2 - N_1\left(2N_1 - N_2 - N_3\right)\right],$$

$$\mathcal{S}_- = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(N_3 - N_2\right)\left(N_1 - N_2 - N_3\right),$$

$$q = \frac{1}{2}(3\gamma - 2)(1 - K) + \frac{3}{2}(2 - \gamma)(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2),$$

$$K = \frac{1}{12}\left[N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 - 2\left(N_1N_2 + N_2N_3 + N_3N_1\right)\right].$$

Ici γ représente un paramètre réel tel que

$$2/3 < \gamma < 2.$$

Chaque solution $x(t) = (\Sigma_+(t), \Sigma_-(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ du système (11) représente l'un des univers de Bianchi de classe A. Les coordonnées Σ_+ et Σ_- décrivent l'anisotropie du flot de Hubble du modèle et les coordonnées N_1, N_2, N_3 décrivent le type de Bianchi de son groupe d'isométrie (voir [11, 12]). Considérons la fonction

$$\Omega = 1 - \left(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2\right) - K.$$

On a

$$\Omega' = [2q - (3\gamma - 2)]\,\Omega.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{B}$ défini par

$$\mathcal{B} = \{\Omega \geq 0, N_1 \geq 0, N_2 = N_3 = 0\} \tag{12}$$

est invariant. Sur cet ensemble le système (11) devient

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_+' & = & -(2-q)\Sigma_+ + \frac{1}{3}N_1^2 \\ \Sigma_-' & = & -(2-q)\Sigma_- \\ N_1' & = & (q - 4\Sigma_+)N_1 \end{array} \tag{13}$$

où

$$q = \frac{1}{2}(3\gamma - 2)(1 - \frac{1}{12}N_1^2) + \frac{3}{2}(2-\gamma)(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2).$$

Dans la suite on se propose de d'étudier le flot du système (13), qui décrit l'évolution d'un modèle cosmologique dit univers de Bianchi II (voir [11, 12]). Les plans définis respectivement par $\Sigma_- = 0$ et par $N_1 = 0$, ainsi que l'ellipsoïde

$$\Omega = 1 - \left(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2\right) - \frac{1}{12}N_1 = 0$$

sont des ensembles invariants du système 13. Comme ce système est aussi invaraint par la transformation $\Sigma_- \mapsto -\Sigma_-$, le flot est symétrique par rapport au plan $\Sigma_- = 0$.

4.2. **Points d'équilibre.**

4.2.1. *Univers de Friedmann-Lemaître plat.* Cet univers correspond au point d'équilibre F du système (13) défini par

$$\Sigma_+ = \Sigma_- = 0, \quad N_1 = 0$$

Les valeurs propres du linéarisé sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{2}(2-\gamma) < 0, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2}(3\gamma - 2) > 0.$$

Les sous-espace propres sont

$$E^s = \{N_1 = 0\}, \qquad E^u = \{\Sigma_+ = \Sigma_- = 0\}.$$

Comme le plan $N_1 = 0$ est invariant on a $W^s = \{N_1 = 0\}$. La variété invariante W^u est de dimension 1. Elle sera décrite plus loin (voir la section 4.3.2).

4.2.2. *Univers de Collins-Stewart (II).* Cet univers correspond au point d'équilibre P du système (13) défini par

$$\Sigma_+ = \frac{1}{8}(3\gamma - 2), \quad \Sigma_- = 0, \quad N_1 = \frac{1}{4}\sqrt{(2-\gamma)(3\gamma-2)}.$$

Les valeurs propres du linéarisé vérifient

$$\lambda_1 < 0, \qquad \lambda_2 < 0, \qquad \lambda_3 < 0.$$

Par conséquent $E^s = \mathbb{R}^3$, donc le point d'équilibre P est un puits.

4.2.3. *Vide de Kasner.* Cet univers correspond au cercle de points d'équilibres $\mathcal{K}$ défini par

$$\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2 = 1, \quad N_1 = 0.$$

Les valeurs propres du linéarisé au point d'équilibre $(\Sigma_+, \Sigma_-, 0)$ sont données par

$$\lambda_1 = 3(2-\gamma) > 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2(1 - 2\Sigma_+).$$

Par conséquent on a

$$dimE^c = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \Sigma_+ \neq 1/2, \\ 2 & \text{si} \quad \Sigma_+ = 1/2. \end{cases}$$

$$dimE^u = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad \Sigma_+ < 1/2, \\ 1 & \text{si} \quad \Sigma_+ \geq 1/2. \end{cases}$$

$$dimE^s = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \Sigma_+ \leq 1/2, \\ 1 & \text{si} \quad \Sigma_+ > 1/2. \end{cases}$$

Les variétés centrale W^c, instable W^u et stable W^s du point d'équilibre de Kasner $(\Sigma_+, \Sigma_-, 0)$ seront décrites dans la section suivante.

4.3. **Dynamique sur les variétés invariantes.**

4.3.1. *Dynamique dans la variété $N_1 = 0$.* Dans ce plan, le système s'écrit

$$\Sigma_+' = -(2-q)\Sigma_+, \qquad \Sigma_-' = -(2-q)\Sigma_-$$

Ce système décrit l'évolution d'un modèle cosmologique dit univers de Bianchi I. Les orbites sont radiales (voir Fig 3). Ainsi la variété instable d'un point d'équilibre de Kasner $(\Sigma_+, \Sigma_-, 0)$ contient le rayon passant par (Σ_+, Σ_-).

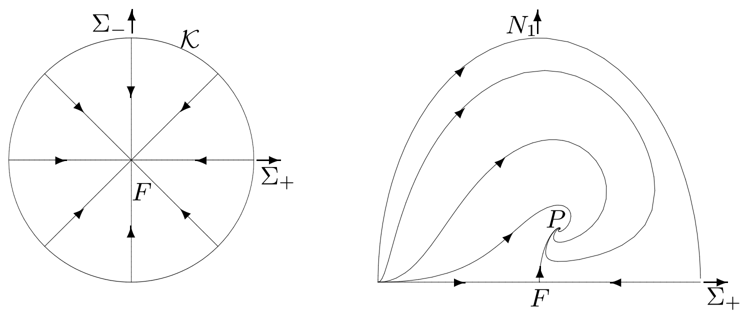

FIGURE 3. *Dynamique du système (13) dans le plan $N_1 = 0$ (à gauche) et dans le plan $\Sigma_- = 0$ (à droite).*

4.3.2. *Dynamique dans la variété* $\Sigma_- = 0$. Dans ce plan le système s'écrit

$$\Sigma_+' = -(2-q)\Sigma_+ + \frac{1}{3}N_1^2, \qquad N_1' = (q - 4\Sigma_+)N_1.$$

La demi ellipse $\Sigma_+^2 + \frac{1}{12}N_1^2 = 1$ est invariante. Le point d'équilibre de Collins-Stewart P attire toutes les solutions du domaine défini par $N_1 > 0$ et $\Sigma_+^2 + \frac{1}{12}N_1^2 < 1$ (voir la section 4.4). Par conséquent la variété instable du point d'équilibre de Friedmann-Lemaître F tend vers P (voir Fig 3).

4.3.3. *Dynamique dans la variété* $\Omega = 0$. On vérifie que l'on a $\Sigma_- = k(\Sigma_+ - 2)$, avec k une constante arbitraire. Par conséquent (voir Fig 4), les orbites sont données par l'intersection des plans verticaux passant par le point $(2, 0)$ avec le demi ellipsoïde

$$\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2 + \frac{1}{12}N_1^2 = 1, \qquad N_1 > 0.$$

Ces orbites s'appelent des univers de Taub. Chaque plan vertical coupe le cercle de Kasner en deux points d'équilibre de Kasner: un tel que $\Sigma_+ < 1/2$ et un tel que $\Sigma_+ > 1/2$. Une orbite de Taub est contenue dans la variété instable du premier et dans la variété stable du second.

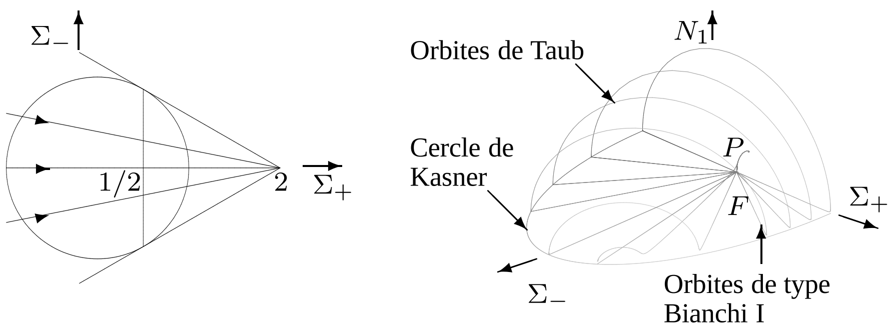

FIGURE 4. *Projection dans le plan* (Σ_+, Σ_-) *des orbites du système (13) correspondant à l'ensemble invariant* $\Omega = 0$ *(à gauche) et orbites de ce système dans la région* $\Sigma_- \geq 0$ *du domaine invariant* $\mathcal{B}$ *défini par (12) (à droite).*

4.4. **Attracteurs futur et passé.** Soit $S = \{\Omega > 0, N_1 > 0, N_2 = N_3 = 0\}$. On construit une fonction strictement croissante Z positive dans $S \setminus P$ telle que $Z(x) \to 0$ quand $x \to \partial S$ et on applique le principe de monotonie (voir [11], page 151). On obtient alors.

Proposition 4.1. *Pour tout* $x \in S$ *on a* $\omega(x) = P$.

Par conséquent les orbites sont comme sur la figure 4. Le point d'équilibre P est l'attracteur futur. L'ensemble $\{(\Sigma_+, \Sigma_-) \in \mathcal{K} : \Sigma_+ < 1/2\}$ est l'attracteur passé. Dans la figure 4 on a représenté le demi espace $\Sigma_- \geq 0$. Les orbites du demi espace $\Sigma_- < 0$ se déduisent par symétrie par rapport au plan invariant $\Sigma_- = 0$. Ainsi tous les univers de type Bianchi II, c'est à dire ceux de l'ensemble invariant $\mathcal{B}$, tendent asymptotiquement vers l'univers de Collins-Stewart P sauf ceux des ensembles invariants $N_1 = 0$ ou $\Omega = 0$, c'est à dire les univers de Taub, de Kasner ou de type Bianchi I.

REFERENCES

[1] L. ANDERSSON, The global existence problem in general relativity, in *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*, 71–120, Birkhäuser, Basel, 2004.

[2] D. V. ANOSOV, V. I. ARNOLD (Eds.) *Dynamical Systems I, III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag 1988.

[3] J. BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three-Body Problem*. History of Mathematics, 11, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1997.

[4] A. CHENCINER, *De la Mécanique Céleste à la théorie des Systèmes Dynamiques, aller et retour*, Epistémologie des systèmes dynamiques, Paris, 1999 (http://www.bdl.fr/Equipes/ASD/preprints).

[5] J. K. HALE, *Ordinary differential equations*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 21, Wiley-Interscience, 1969.

[6] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Diferential Equations, Dynamical systems and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, vol. XI, Academic Press, 1974.

[7] S. LEFSCHETZ, *Differential Equations : Geometric Theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 6, Wiley-Interscience, 1963.

[8] K. R. MEYER, G. R. HALL, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag 1992.

[9] V. V. NEMYTSKII, V. V. STEPANOV, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, 1960.

[10] H. RINGSTRÖM, The Bianchi IX attractor. *Ann. Henri Poincaré* 2 (2001), no. 3, 405–500.

[11] J. WAINWRIGHT, G. F. R. ELLIS, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, 1997.

[12] J. WAINWRIGHT, L. HSU, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies : orthogonal models of class A, *Class. Quantum Grav.* 6 (1989), 1409-1431.

[13] A. ZEGHIB, *Homeogeneous spaces, dynamics, Cosmology : Geometric flows and rational dynamics*. These proceedings (http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/proceedings.html).

Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications,
Université de Haute Alsace,
4 rue des Frères Lumière, 68093, Mulhouse, France.
Tewfik.Sari@uha.fr