

TRAVAUX EN COURS

Tewfik Sari

Contrôle non linéaire et applications

COURS DONNÉS À L'ÉCOLE D'ÉTÉ DU CIMPA
DE L'UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

HERMANN – EDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS, PARIS

Contrôle non linéaire et applications

Collection Travaux en cours, 64

Tewfik Sari

Contrôle non linéaire et applications

COURS DE L'ÉCOLE D'ÉTÉ DU CIMPA
DE L'UNIVERSITÉ DE TLEMCEM

Préface de Jean-Michel Coron

COLLECTION TRAVAUX EN COURS
HERMANN – EDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Classification AMS : 34, 35, 49, 93.

Mots-clés : contrôle, contrôle optimal, principe du maximum de Pontryagin, stabilisation, observabilité, équations à second membre discontinu, perturbations singulières, équation des ondes, équation de la chaleur, équation algébrique de Riccati

Key-words : control, optimal control, Pontryagin maximum principle, stabilization, observability, discontinuous righthand side equations, singular perturbations, wave equation, heat equation, algebraic Riccati equation

ISBN 2 7056 6511 0

2005, HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS, 6 RUE DE LA SORBONNE, 75015 PARIS

Toute reproduction ou représentation de cet ouvrage, intégrale ou partielle, serait illicite sans l'autorisation de l'éditeur et constituerait un contrefaç. Les cas strictement limités à usage privé ou de citation sont régis par la loi du 11 mars 1957.

Préface

L'ouvrage édité par Tewfik Sari porte sur la théorie du contrôle. Il va des résultats classiques aux recherches les plus récentes avec un très bon choix dans les thèmes développés. Un effort didactique important a été fait.

Le livre commence par une introduction, écrite par Claude Lobry et Tewfik Sari, qui rappelle de façon efficace les principales notions de la théorie du contrôle ainsi que les résultats fondamentaux usuels (critère de Kalman, théorème du placement des pôles, fonction de Lyapunov, liens entre contrôlabilité et stabilisabilité d'un système non linéaire et celles des linéarisés, observateurs...).

Le second chapitre, écrit par Ugo Boscain et Benedetto Piccoli, porte sur le contrôle optimal. Il couvre un large spectre de ce sujet à la fois important et difficile. Il va des notions classiques de calcul des variations et du principe du maximum de Pontryagin jusqu'à des sujets de recherches actuels, comme l'étude des singularités des contrôles optimaux et de la synthèse optimale.

Le troisième chapitre, écrit par Sorin Micu et Enrique Zuazua porte sur la contrôlabilité des équations aux dérivées partielles, un secteur de recherche très dynamique où, malgré des progrès récents et nombreux, il reste encore beaucoup de problèmes ouverts passionnants. Il commence par faire le lien avec la dimension finie et présente en détail la relation entre la contrôlabilité d'un système linéaire et l'observabilité de son dual. Cette relation conduit à essayer de montrer des inégalités d'observabilité pour montrer la contrôlabilité. Cette stratégie est illustrée sur l'équation des ondes et sur l'équation de chaleur en utilisant différentes techniques (multiplicateurs, analyse microlocale, analyse de Fourier).

Souvent dans la pratique les systèmes de contrôle comportent des variables dont les dynamiques respectives évoluent à des échelles de temps très différentes. On a alors affaire à des perturbations singulières. C'est le sujet de ce quatrième chapitre, écrit par Claude Lobry et Tewfik Sari. Il commence par un des outils fondamentaux, à savoir la théorie de Tikhonov. Il détaille comment en déduire des résultats importants sur la stabilité des systèmes à plusieurs échelles de temps. Il explique aussi les limitations de la méthode et contient un appendice original sur les outils de l'analyse non standard, analyse qui est bien adaptée pour traiter les perturbations singulières.

Le cinquième chapitre, écrit par Gauthier Sallet, porte sur l'équation de Riccati algébrique, un outil très puissant pour obtenir des feedbacks stabilisants dans de nombreuses situations. Il regroupe de façon unifiée des résultats variés, avec en particulier une analyse détaillée de l'algorithme de résolution de cette équation utilisé par les logiciels MATLAB et SCILAB. Il contient aussi des applications récentes de l'approche Riccati à la robustesse des feedbacks stabilisants.

De nombreux systèmes physiques sont modélisés par des équations différentielles ayant un second membre discontinu. De plus, même quand ce n'est pas le cas, on peut avoir intérêt à utiliser des feedbacks discontinus pour le stabiliser ; le système bouclé est alors modélisé par un champ de vecteurs discontinu. Le problème de Cauchy pour les champs de vecteurs discontinus est l'objet de ce dernier chapitre, écrit par Claude Lobry et Tewfik Sari. C'est un sujet difficile, encore trop peu étudié. Ce chapitre y apporte une contribution significative. Il commence par étudier l'approche classique, à savoir celle de Filippov. Il étudie ensuite deux autres approches, beaucoup moins traditionnelles, reposant respectivement sur un schéma d'Euler perturbé et sur un schéma d'Euler stochastique. Ces trois approches sont comparées et illustrées sur de nombreux cas très éclairants.

Au total il s'agit donc d'un livre passionnant et très complet qui devrait intéresser aussi bien des ingénieurs que des chercheurs débutants ou confirmés travaillant en théorie du contrôle ou cherchant à s'initier à ce domaine. Les thèmes abordés sont tous importants et bien illustrés par des exemples abondants très didactiques.

Jean-Michel Coron
Professeur à l'université de Paris-Sud
Professeur à l'Institut universitaire de France

Remerciements

Du 26 avril au 8 mai 2003, s'est tenue à Tlemcen l'école

CIMPA–UNESCO–TLEMCCEN
Contrôle non linéaire et applications

Il s'agissait de la première école du CIMPA en Algérie. Elle a été soutenue par plusieurs organismes et je voudrais remercier très chaleureusement :

en la personne de Monsieur le Professeur Nouredine Ghouali, Recteur de l'Université de Tlemcen, les autorités universitaires algériennes ainsi que la SONATRACH (société algérienne des hydrocarbures), qui ont pris à leur charge le séjour de tous les participants,

en la personne de Monsieur le Professeur Michel Jambu, le CIMPA, qui a soutenu l'opération de bout en bout et qui a assuré le transport de plusieurs participants, ainsi que l'achat de documentation,

l'Ambassade de France en Algérie ainsi que le Centre International de Physique Théorique (ICTP, Trieste) qui ont assuré le transport de plusieurs participants,

en la personne de Monsieur le Professeur Brahim Cherki, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Ingénieur de Tlemcen, l'ensemble du Comité local d'organisation, pour le formidable accueil à Tlemcen ; de l'avis unanime de tous les participants, l'école a été une réussite remarquable.

Il me reste enfin à remercier ceux sans lesquels rien n'aurait été possible : les très nombreux participants. Leur enthousiasme et leur assiduité, en particulier ceux des enseignants qui n'ont pas ménagé leurs efforts pour assurer les cours et en fournir des notes distribuées pendant l'école, ont fait merveille. Ce volume reproduit les versions complétées et remaniées de certains de ces cours.

Mulhouse, le 11 mai 2004
Tewfik Sari

Liste des participants

Alger : Ainouz Abdelhamid, Belhadj Zoulikha, Bellout Rabah Hacène, Djebali Smail, Kacimi Abderrahim, Mahmoudi Abdelouahab, Youyou Aini Salima. *Annaba* : Chemlal Rezki, Ghanem Redouane, Labidi Soraya, Nasri Nassima, Taibi Mahmoud, Yechoui Akila. *Bechar* : Benbachir Maamar. *Blida* : Abdessameud Abdelkader. *Constantine* : Ladaci Samir. *Dakar* : Balde Moussa, Seck Diaraf, Sene Abdoulaye. *Grenoble* : Alla Hassane. *Kano* : Ibrahim Abdullahi. *La Rochelle* : Sari Nadir. *Madrid* : Zuazua Enriques. *Mascara* : Adnane Ahmed. *Metz* : Chabour Rachid, Sallet Gauthier. *Mostaganem* : Benchaib Abdellatif, Dahmani Zoubir, Hiber Djahida. *Mulhouse* : Sari Tewfik. *Nantes* : Ghanès Malek. *Ndjamena* : Layaka Aminou Mahamat. *Nice-Sophia-Antipolis* : Gouzé Jean-Luc, Lobry Claude. *Oran* : Bekkara Samir, Benahmed Boubakeur, Cheggag Mustapha, Miloudi Yamina, Nachi Khadra. *Paris* : Coron Jean Michel. *Saïda* : Azzouz Abdelhalim, Djerfi Kouider. *Saint Louis* : Drame Abdou Khadry. *Sétif* : Bensalem Naceurdine. *Sidi Bel Abbes* : Benaïssa Abbès, Bouabdellah Omar, Lakrib Mustapha. *Skikda* : Benloucif Mohamed Lamine. *Tlemcen* : Bekkouche Mohamed Amine, Belarouci Salim, Belbachir Ahmed, Benalal Haféda, Bendimerad Soraya, Benharrat Mohammed, Benouaz Tayeb, Bensalah Hamid, Bensalah Choukri, Benyahia Boumediene, Borsali Salima, Bouayad Agha Zakya, Bouguima Sidi-Mohammed, Cherki Brahim, Choukchou Braham Amel, Dib Hacen, Dib Nabahats, El-Yebdri Amina, Fekih Sihem, Gaouar Nihed, Ghomri Latéfa, Ghouali Noureddine, Guezzen Amine Hakim, Hadj Abdelkader Mohamed, Hadjila Mourad, Hadj-Slimane Djamila, Hakem Amel, Hassane Chahinez, Hassam Ahmed, Hathout Fouzi, Kada Kloucha Mohammed, Khelfi Mohamed Fayçal, Khitri Leïla, Lassouani Fatiha, Lazzouni Sihem, Leggat Ahmed Réda, Mâchou Fatima Zohra, Mezouar Nadia, Mouhadjer Lotfi, Moussaoui Abdelhak, Moussaoui Ali, Rahmoun Amel, Sebih Mohammed, Taouli Sid Ahmed, Tebbal-Bedjaoui Naïma, Touaoula Mohamed Tarik, Yadi Karim. *Trieste* : Boscain Ugo. *Tunis* : Jammazi Chaker, Salem Ali. *Ya-moussoukro* : Mensah Patrice Edoeté. *Yaoundé* : Bowong Samuel.

Table des matières — Contents

Introduction à la théorie du contrôle <i>Claude Lobry et Tewfik Sari</i>	1
1 Introduction	1
1.1 Système contrôlé	1
1.2 Approximation linéaire d'un système contrôlé	2
2 Controlabilité	2
2.1 Critère de contrôlabilité de Kalman	3
2.2 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire	3
3 Stabilisation	4
3.1 Bouclage statique	5
3.2 Concepts de stabilité	5
3.3 Stabilité des systèmes linéaires	6
3.4 Approximation linéaire d'un système	8
3.5 Stabilisation d'un système linéaire	8
3.6 Stabilisation locale d'un système non linéaire	9
3.7 Fonctions de Lyapounov	9
4 Observabilité	12
4.1 Système commandé-observé	12
4.2 Critère d'observabilité de Kalman	12
4.3 Observateur de Luenberger d'un système linéaire	13
4.4 Stabilisation par un bouclage dynamique	13
5 Autres problèmes de la théorie du contrôle	14
5.1 Contrôle optimal	14
5.2 Contrôles discontinus	16
5.3 Perturbations singulières	17
Références	17
 An Introduction to Optimal Control <i>Ugo Boscain and Benetto Piccoli</i>	 19
1 Introduction	19
2 Basic Facts on Geometric control	21

3	Optimal Control	25
3.1	Introduction	26
3.2	The Theory of Optimal Control	30
3.3	Calculus of Variations	36
3.4	An Detailed Application: the Grusin's Metric	38
3.5	Geometric Control Approach to Synthesis	41
3.6	Fuller Phenomenon and Dubins' Car With Angular Acceleration.	43
4	The Minimum Time Problem for Planar Control Affine Systems	45
4.1	Pontryagin Maximum Principle and Switching Functions	46
4.2	Singular Trajectories and Predicting Switchings	48
4.3	The Optimal Synthesis: A Brief Summary of Results	53
4.4	Some Examples	56
	Bibliographical Note	58
	Exercises	60
	References	61
	Controllability of Partial Differential Equations	
	<i>Sorin Micu and Enrique Zuazua</i>	67
1	Controllability and stabilization of finite dimensional systems	69
1.1	Controllability of finite dimensional linear systems	69
1.2	Observability property	72
1.3	Kalman's controllability condition	76
1.4	Bang-bang controls	79
1.5	Stabilization of finite dimensional linear systems	82
2	Interior controllability of the wave equation	86
2.1	Introduction	86
2.2	Existence and uniqueness of solutions	86
2.3	Controllability problems	87
2.4	Variational approach and observability	88
2.5	Approximate controllability	93
2.6	Comments	97
3	Boundary controllability of the wave equation	97
3.1	Introduction	97
3.2	Existence and uniqueness of solutions	97
3.3	Controllability problems	98
3.4	Variational approach	99

3.5	Approximate controllability	103
3.6	Comments	106
4	Fourier techniques and the observability of the 1D wave equation	107
4.1	Ingham's inequalities	107
4.2	Spectral analysis of the wave operator	113
4.3	Observability for the interior controllability of the 1D wave equation .	116
4.4	Boundary controllability of the 1D wave equation	119
5	Interior controllability of the heat equation	121
5.1	Introduction	121
5.2	Existence and uniqueness of solutions	122
5.3	Controllability problems	123
5.4	Approximate controllability of the heat equation	124
5.5	Variational approach to approximate controllability	126
5.6	Finite-approximate control	129
5.7	Bang-bang control	129
5.8	Comments	131
6	Boundary controllability of the 1D heat equation	132
6.1	Introduction	132
6.2	Existence and uniqueness of solutions	133
6.3	Controllability and the problem of moments	133
6.4	Existence of a biorthogonal sequence	137
6.5	Estimate of the norm of the biorthogonal sequence: $T = \infty$	138
6.6	Estimate of the norm of the biorthogonal sequence: $T < \infty$	142
	References	144
Singular Perturbations Methods in Control Theory		
	<i>Claude Lobry and Tewfik Sari</i>	151
1	Introduction	151
2	Fast and slow systems	153
2.1	Tikhonov theory	153
2.2	Singular perturbations on the infinite interval	156
2.3	Stability	157
2.4	Practical stability	159
3	Feedback Stabilization	160
3.1	Stabilization	160
3.2	Practical Stabilization	163

4	The Peaking Phenomenon	164
4.1	The limitations of Tikhonov's theory	164
4.2	Instantaneous Stability and Uniform Infinitesimal Boundedness	168
4.3	Further developments	170
A	A short tutorial on Nonstandard Analysis	171
B	Some concepts of Calculus revisited in NSA	173
	References	175
	Théorie du Contrôle et Equations Algébriques de Riccati	
	<i>Gauthier Sallet</i>	179
1	Introduction	179
2	ARE et contrôle quadratique des systèmes LTI en horizon infini	180
2.1	Filtre de Kalman déterministe	181
3	ARE résolution, algorithmes	182
3.1	Equation Générale de Riccati	182
3.2	Matrice Hamiltonienne associée à une ARE	182
3.3	Solution stabilisante et matrice Hamiltonienne associée.	183
3.4	Un rappel sur les équations de Sylvester et de Lyapunov	184
3.5	Un rappel sur l'observabilité	188
3.6	Le théorème d'existence pour l'ARE	191
3.7	La preuve du théorème	191
3.8	Contrôle linéaire quadratique : les cas classiques	197
4	Résolution numérique de l'ARE	201
4.1	Principe de l'algorithme	201
4.2	Initialisation de la M-file	201
4.3	Construction de H et forme de Schur	202
4.4	Hyperbolicité de H	203
4.5	Réarrangement des vecteurs et valeurs propres	204
5	Résultats de robustesses	208
5.1	Introduction	208
5.2	Historique	213
5.3	Distance à l'instabilité	215
5.4	Distance à l'inobservabilité	220
5.5	Distance à l'indetectabilité	221

6	Quelques applications	221
6.1	Robustesse de la stabilité	221
6.2	Un algorithme pour calculer $\beta(A)$	224
6.3	Le résultat de stabilité de Thau	226
6.4	Comparaison des résultats	227
6.5	Résultats connexes	228
6.6	Relation entre $\tau(A)$ et les comportements du système	231
	Références	232
	Equations différentielles à second membre discontinu	
	<i>Claude Lobry et Tewfik Sari</i>	237
1	Introduction	237
2	Les solutions de Filippov	242
3	Equations différentielles et schéma d'Euler perturbé	247
4	Régularisation par convolution	249
5	Champs de \mathbb{R}^2 discontinus le long d'une courbe	253
5.1	Champs traversant la courbe	254
5.2	Champs convergeant vers la courbe de discontinuité	254
5.3	Champs divergeant de la courbe de discontinuité	256
6	Discontinuité le long d'une courbe dans \mathbb{R}^3	259
7	Quelques commentaires bibliographiques	265
	Références	265