Introduction à la théorie du contrôle

Claude Lobry Tewfik Sari

Ce volume contient des cours qui ont été donnés pendant l'école du CIMPA *Contrôle non linéaire et Applications* qui s'est tenu à Tlemcen du 26 avril au 8 mai 2003. Le cours de Hassane Alla (Université de Grenoble), *Systèmes à évènements discrets* basé sur les ouvrages [9] et [19] n'est pas reproduit dans ce volume. Il en est de même du cours de Rachid Chabour (Université de Metz) *Fonctions de Lyapounov et stabilité des systèmes déterministes* [5], du cours de Jean Michel Coron (Université de Paris-Sud), *Contrôlabilité et stabilisation des systèmes non linéaires*, basé sur les articles [6, 7, 8] et du cours de Jean Luc Gouzé (INRIA, Sophia Antipolis), *Automatique des bioprocédés*, basé sur [2, 3]. Pour permettre au lecteur de situer les questions abordées dans ce volume dans le contexte général de la théorie du contrôle, on expose dans ce premier chapitre quelques notions de base de cette théorie.

1 Introduction

1.1 Système contrôlé

Un système contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(t) \in M, \qquad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{1}$$

En général le vecteur des états $x(t)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$), et les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble de contôles admissibles $\mathcal{U}$, qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale $x_0 \in M$ et tout contrôle admissible $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, le système (1) admet une unique solution $x(t)$ telle que $x(0) = x_0$, et que cette solution soit définie sur $[0, +\infty)$. On notera cette solution par $x^f(t, x_0, u(\cdot))$. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on pourra ommettre dans cette notation le champ f, la condition initiale x_0, ou bien le contrôle $u(\cdot)$. Le système (1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u \longrightarrow \boxed{\dot{x} = f(x,u)} \longrightarrow x$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce volume,il y a les notions de *contôlabilité* et de *stabilisation*. On se propose de définir ces notions et de rappeler les principaux résultats de contrôlabilité, de stabilisation et d'observabilité des systèmes linéaires (pour l'essentiel on trouvera les détails et les preuves dans [1]) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2}$$

où A est une matrice $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande. Les solutions de (2) sont données par

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{3}$$

Il faut noter que certains problèmes pratiques sont mieux modélisés par des équations aux dérivées partielles [7, 8, 17] ou bien par des systèmes à évènements discrets [9, 19].

1.2 Approximation linéaire d'un système contrôlé

Le système linéaire (2) s'obtient généralement par linéarisation du système non linéaire (1) autour d'un point équilibre (x_e, u_e) pour lequel $f(x_e, u_e) = 0$. En effet, si on pose :

$$X = x - x_e, \quad U = u - u_e, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e),$$

on obtient l'équation :

$$\dot{X} = AX + BU + o(X, U)$$

Le système linéaire commandé $\dot{X} = AX + BU$ s'appelle alors l'*approximation linéaire* (ou le *linéarisé tangent*) du système non linéaire (1). Un des objectifs de l'automaticien consiste à déduire les propriétés du système non linéaire (1) de celles de son linéarisé tangent.

2 Controlabilité

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément on pose la définition suivante

Définition 1 *On dit que le système (1) est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in M$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0,T] \to U$ tel que $x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$.*

2.1 Critère de contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 1 *Le système linéaire (2) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité (ou de commandabilité) de Kalman*

$$(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

Noter que la paire (A, B) est commandable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$\mathcal{C}_T = \int_0^T e^{sA} B B' e^{sA'} ds$$

soit inversible. Ici A' et B' désignent les matrices transposées des matrices A et B. Le contrôle $u(\cdot)$ qui transfère x_0 en $x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$ est simplement donné par

$$u(s) = B' e^{(T-s)A'} \mathcal{C}_T^{-1} (x_1 - e^{TA} x_0)$$

comme on peut le vérifier en utilisant la formule (3).

2.2 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Définition 2 *On dit que le système (1) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{A}$ de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \mathcal{A}$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0,T] \to U$ tel que $x_1 = x(T, x_0, u(\cdot))$.*

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation (voir [13], p. 32 et 366).

Théorème 2 *Supposons qu'il existe $u_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que U soit un voisinage de u_0 et $f(x_0, u_0) = 0$. Soient*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)$$

Si le rang de la matrice $(B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ est égal à n (c'est à dire que le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est contrôlable), alors le système non linéaire (1) est localement contrôlable en x_0.

Noter que la contrôlabilité du linéarisé n'est pas une condition nécessaire de contrôlabilité du système non linéaire. En fait, pour les systèmes non linéaires, il existe un critère simple, rappelant le critère de Kalman, qui permet d'aborder les questions de contrôlabilité. Expliquons le sur le système particulier :

$$\dot{x} = f(x) + ug(x), \qquad |u| \leq 1$$

On appelle crochet de Lie des deux champs de vecteurs f et g le champ de vecteur défini par la formule :

$$x \to [f,g](x) = Df(x)g(x) - Dg(x)f(x)$$

et l'algèbre de Lie engendrée par f et g, notée $\mathcal{L}(f,g)$, la plus petite famille close pour l'opération de crochet qui contienne f et g. Le rang en x de (f,g) est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs en x des éléments de $\mathcal{L}(f,g)$. Appelons *ensemble des états accessibles* à partir de x_0 l'ensemble des points qui peuvent être atteints à partir de x_0 un utilisant tous les contrôles admissibles. Un résultat fondamental est que, si le rang en x_0 de (f,g) est égal à n, alors l' ensemble des états accessible à partir de x_0 est d'intérieur non vide. De ce résultat on déduit le critère de Kalman. En effet, considérons le système

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad u \in \mathbb{R}$$

où le contrôle u est non borné. Les états accessibles du système

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad |u| \leq 1$$

sont contenus dans l'espace vectoriel des états contrôlable à partir de x_0 du système où le contrôle est non borné. Si ces états accessibles sont d'intérieur non vide quel que soit x_0 le système sera contrôlable, puisqu'un sous espace vectoriel d'intérieur non vide est l'espace tout entier. Calculons les crochets :

$$\begin{array}{l}
[(x \to Ax), (x \to b)]\,(x) = Ab, \\
[(x \to Ax), (x \to Ab)]\,(x) = A^2 b, \\
\dots \\
\left[(x \to Ax), (x \to A^{n-2}b)\right](x) = A^{n-1}b.
\end{array}$$

0n voit que le critère de Kalman équivaut à la condition du rang. Quelques aspects élémentaires de cette méthode sont exposés dans [14] et un exposé complet se trouve dans [11].

3 Stabilisation

Un *contrôle* (ou une *commande*) *en boucle ouverte* est une application $t \to u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un *contrôle en boucle fermée*, appelé aussi une *rétroaction*, ou un *bouclage*, ou encore un *feed back*, est une application $u \to R(x)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

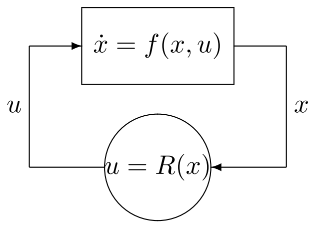
3.1 Bouclage statique

Définition 3 (Bouclage statique). *On dit que u est un bouclage statique du système (1) si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction.*

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x} = f(x, R(x)) \tag{4}$$

Il est représenté par le diagramme suivant.



Le problème de la *stabilisation* (ou *régulation*) consiste à maintenir le système près d'un équilibre x^*. Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que x^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (4).

3.2 Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x} = f(x) \tag{5}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 4 *L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (5) on ait*

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \ \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

Définition 5 *L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (5) on ait*

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit globalement attractif si pour toute solution $x(t)$ de (5) on a $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ défini par la propriété

$$x(0) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi $x = 0$ est attractif si $\mathcal{B}$ est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$.

Définition 6 *L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.*

Définition 7 *L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait*

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|\mathrm{e}^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (5) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (5) on a $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|\mathrm{e}^{-\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$.

On montre que, en général (voir [12]), stable *n'implique pas* attractif, attractif *n'implique pas* stable, exponentiellement stable *implique* asymptotiquement stable, et asymptotiquement table *n'implique pas* exponentiellement table.

3.3 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, *attractif* implique *stable* (donc *asymptotiquement stable é*quivaut à *attractif*) et *asymptotiquement stable é*quivaut à *exponentiellement stable*. De plus l'attractivité est toujours globale. En effet considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{6}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n. La solution de (6) s'écrit

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}x(0). \tag{7}$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série

$$\mathrm{e}^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots \tag{8}$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les *valeurs propres* de la matrice A, c'est à dire les racines du *polynôme caractéristique*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en λ. Il admet donc s racines distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ de multiplicités algébriques $m(\lambda_i)$ satisfaisant

$$m(\lambda_1) + \cdots + m(\lambda_s) = n.$$

Par conséquent

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}.$$

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{\nu} \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{\nu+1}$$

soit stationnaire pour $\nu \geq \nu(\lambda)$. Pour toute valeur propre λ de A on a

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Le polynôme minimal $M_A(\lambda)$ de A est donné par

$$M_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu(\lambda_s)}.$$

Les valeurs propres de A sont réelles ou complexes. Si elles sont complexes, alors elles sont conjuguées deux à deux. Les composantes $x_i(t), i = 1, \cdots, n$ de la solution (7) sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, de termes de la forme

1. $t^j \mathrm{e}^{t\lambda}$ où λ est une valeur propre réelle de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$,
2. $t^j \mathrm{e}^{ta} \cos bt$ et $t^j \mathrm{e}^{ta} \sin bt$, c'est à dire les parties réelles et imaginaires de $t^j \mathrm{e}^{t\lambda}$, où $\lambda = a + \mathrm{i}b$ est une valeur propre complexe de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 3 *1. Si* $\exists j\ \mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$ *ou si* $\exists k\ \mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ *et* $\nu(\lambda_k) > 1$ *alors* $x = 0$ *est instable.*

2. Si $\forall j\ \mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ *alors* $x = 0$ *est globalement exponentiellement stable.*

3. Si $\forall j\ \mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0$ *et* $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$ *et s'il existe* k *tel que* $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ *alors* $x = 0$ *est stable mais non attractif.*

Par conséquent pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ les propriétés suivantes sont équivalentes: 1) l'origine est attractive, 2) l'origine est globalement attractive, 3) l'origine est asymptotiquement stable, 4) l'origine est globalement asymptotiquement stable, 5) l'origine est exponentiellement stable, 6) l'origine est globalement exponentiellement stable, 7) toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative (on dit que la matrice A est de Hurwitz).

3.4 Approximation linéaire d'un système

Considérons un système

$$\dot{x} = f(x), \tag{9}$$

tel que $f(x^*) = 0$, de sorte que $x = x^*$ soit un équilibre du système. On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$$

la matrice jacobienne de f évaluée au point x^*. Le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{10}$$

s'appelle le *linéarisé* (ou l'*approximation linéaire*) du système non linéaire (9) en x^*. L'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre $x = x^*$ de (9). Plus précisément on a le résultat suivant connu sous le nom de théorème de Lyapounov.

Théorème 4 *Si $x = 0$ est exponentielement stable pour (10) alors $x = x^*$ l'est pour (9).*

3.5 Stabilisation d'un système linéaire

Définition 8 *On appelle bouclage d'état linéaire (ou régulateur linéaire) du système (2) une loi de commande du type*

$$u = Kx$$

où K, matrice $m \times n$ est dite matrice de gain. Une telle loi est dite stabilisante si l'origine du système en boucle fermée

$$\dot{x} = (A + BK)x \tag{11}$$

est asymptotiquement stable.

Théorème 5 *Si la paire (A, B) est commandable, on peut choisir la matrice de gains K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A + BK$.*

Ce résultat, connu sous le nom de théorème de *placement des pôles* (ou de *placement des modes propres du régulateur*), montre que l'on peut choisir la matrice K de telle sorte que la matrice $A + BK$ soit de Hurwitz et que l'origine du système (11) soit asymptotiquement stable. Donc tout système linéaire contrôlable est stabilisable (globalement).

3.6 Stabilisation locale d'un système non linéaire

On a montré dans la section précédente qu'un système linéaire contrôlable peut être stabilisé asymptotiquement par un contrôle linéaire (donc continu). Cette propriété n'est pas vraie pour un système non linéaire. Il y a des systèmes non linéaires, localement (et même globalement) contrôlables, qu'on ne peut pas stabiliser par un contrôle continu [6, 7]. Cependant si l'approximation linéaire du système est contrôlable, alors on peut le stabiliser par un contrôle continu (et même linéaire). En effet considérons un système commandé

$$\dot{x} = f(x,u), \qquad f(0,0) = 0. \tag{12}$$

On se propose de construire une loi de commande $u = R(x)$ telle que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f(x, R(x))$$

admet l'origine comme équilibre asymptotiquement stable. On considère alors l'approximation linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{13}$$

où les matrices A et B sont définies par

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0).$$

Supposons que (A, B) soit commandable. Il existe alors une matrice K telle que la matrice $A + BK$ soit de Hurwitz. Par conséquent le contrôle $u = Kx$ stabilise globalement le système linéaire (13).

Théorème 6 *Le contrôle $u = Kx$ stabilise localement le système (12).*

En effet le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x} = F(x) = f(x, Kx).$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)K = A + BK.$$

Donc $x = 0$ est asymptotiquement stable pour le linéarisé. Le théorème de Lyapounov (Théorème 4) permet alors d'affirmer que $x = 0$ est asymptotiquement stable pour le système non linéaire $\dot{x} = F(x)$.

3.7 Fonctions de Lyapounov

Les fonctions de Lyapounov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons de nouveau le système

$$\dot{x} = f(x), \tag{14}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre . Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage Ω de l'origine et admettant des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \cdot f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f. Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (14) on a

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Définition 9 *On dit que V est une fonction de Lyapounov pour le système (14) en $x = 0$ dans Ω, si pour tout $x \in \Omega$ on a*

- *$V(x) > 0$ sauf en $x = 0$ où $V(0) = 0$*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$.*

Théorème 7
1. *S'il existe une fonction de Lyapounov pour (14) en $x = 0$ dans un voisinage Ω de 0, alors $x = 0$ est stable.*
2. *Si de plus $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.*
3. *Si de plus $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ alors $x = 0$ est GAS.*

Définition 10 *Une matrice carrée P d'ordre n est dite définie positive si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$x \neq 0 \Rightarrow x'Px > 0.$$

Si P est une matrice symétrique alors ses valeurs propres sont réelles et on a

$$\lambda_{min} \|x\| \leq x'Px \leq \lambda_{max} \|x\|.$$

Pour vérifier qu'une matrice symétrique P est définie positive, on peut utiliser le critère de Sylvester (P est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs).

Théorème 8 *Considérons un système linéaire*

$$\dot{x} = Ax. \tag{15}$$

L'origine $x = 0$ de (15) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute matrice définie positive Q il existe une matrice définie positive P telle que

$$A'P + PA + Q = 0. \tag{16}$$

En ce cas $V(x) = x'Px$ est une fonction de Lyapounov pour (15) en $x = 0$.

Pour la preuve de ce théorème il suffit d'observer que

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x = -x'Qx.$$

Donc le théorème de Lyapounov s'applique et montre que $x = 0$ est asymptotiquement stable. Pour la réciproque on définit

$$P = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA} ds.$$

Cette intégrale est bien convergente car toutes les valeurs propres de la matrice A et donc aussi de sa transposée A' sont de partie réelle strictement négative. La matrice P est définie positive car

$$x \neq 0 \Rightarrow \forall s \geq 0 \left(\mathrm{e}^{sA} x\right)' Q \mathrm{e}^{sA} x > 0 \Rightarrow x'Px > 0.$$

Par ailleurs on a

$$A'P + PA = \int_0^{+\infty} \left[A' \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA} + \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA} A\right] ds.$$

Comme

$$\frac{d}{ds} \mathrm{e}^{sA} = A \mathrm{e}^{sA} = \mathrm{e}^{sA} A,$$

on en déduit que

$$A' \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA} + \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA} A = \frac{d}{ds} \mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA}.$$

Par conséquent

$$A'P + PA = \left(\mathrm{e}^{sA'} Q \mathrm{e}^{sA}\right)_{s=0}^{s=+\infty} = -Q.$$

Donc P vérifie l'équation (16) appelée l'*équation matricielle de Lyapounov*.

Pour construire une fonction de Lyapounov pour le système (15) il faut procéder de la manière suivante :

- Choisir une matrice définie positive Q (par exemple $Q = Id$)
- Résoudre l'équation de Lyapounov (16). Si on a choisi Q symétrique alors P sera symétrique aussi.
- Vérifier que P est définie positive.

4 Observabilité

4.1 Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{17}$$

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant.

$$u \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{array}} \longrightarrow y$$

Le système non linéaire sera dit observable si la sortie $y(t)$ permet de retrouver l'état $x(t)$. On ne donnera pas de définition précise ici renvoyant à la ltérature [10] pour les détails. Un observateur pour le système (17) est un système

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), y(t), u(t)) \tag{18}$$

ayant comme entrées $u(t)$ et $y(t)$ (la sortie du système (17)) et tel que l'erreur

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

tende vers 0 quand $t \to \infty$. L'équation de l'erreur est

$$\dot{e} = f(x,u) - g(x - e, h(x), u)$$

Selon que $e = 0$ est un équilibre GAS, asymptotiquement stable, ou exponentielement stable, on dira que l'observateur est global, local ou exponentiel.

4.2 Critère d'observabilité de Kalman

Considérons le système linéaire commandé-observé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \qquad & x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= Cx, & y \in \mathbb{R}^k. \end{aligned} \tag{19}$$

Définition 11 *On dit que le système linéaire (19) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible $u(\cdot) : [0,T] \to U$ tel que la connaissance de $y(t)$ pour $t \in [0,T]$ permet de déterminer x_0.*

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

Théorème 9 *Le système linéaire (19) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n. On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Noter que la paire (A, C) est observable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$\mathcal{O}_T = \int_0^T e^{sA'} C' C e^{sA} ds$$

soit inversible.

4.3 Observateur de Luenberger d'un système linéaire

Comme la matrice d'observabilité de Kalman est de rang n, il existe une matrice L d'ordre $n \times p$ telle que la matrice $A + LC$ soit de Hurwitz. Considérons alors le système

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

L'équation de l'erreur $e = \hat{x} - x$ est

$$\dot{e} = (A + LC)e$$

Donc $e = 0$ est GAS.

4.4 Stabilisation par un bouclage dynamique

Supposons que l'on sait construire un bouclage statique $u = R(x)$ qui stabilise le système (17). Comme l'état x n'est pas connu, on ne peut pas utiliser ce bouclage. Supposons que le système (17) possède un observateur (18). On aimerait stabiliser le système (17) en utilisant le bouclage $u = R(\hat{x})$, c'est à dire considérer le système en boucle fermée

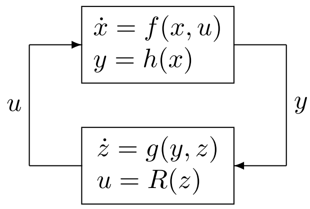
$$\begin{array}{ll} \dot{x} = f(x, u), & y = h(x), \\ \dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y, u), & u = R(\hat{x}). \end{array}$$

On obtient alors un bouclage dynamique :

Définition 12 (Bouclage dynamique). *On dit que u est un bouclage dynamique du système (17) s'il est la sortie d'un système ayant y comme entrée, c'est à dire*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= g(y,z), \\ u &= R(z). \end{aligned}$$

Dans ce cas le système en boucle fermée est représenté par le diagramme suivant.



Ce système s'écrit tout simplement

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, R(z)), \\ \dot{z} &= g(h(x), z). \end{aligned}$$

Un système linéaire contrôlable et observable est stabilisable par bouclage dynamique.

Théorème 10 *Considérons le système linéaire commandé-observé (19). Supposons que la paire (A,B) soit commandable et que la paire (A,C) soit observable. Soient K et L des matrices de gains telles que les matrices $A+BK$ et $A+CL$ soient de Hurwitz. Alors le système*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \\ u &= K\hat{x} \end{aligned}$$

stabilise asymptotiquement le système (19).

En effet dans les variables $(x, e = x - \hat{x})$ on obtient le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A+BK)x + BKe \\ \dot{e} &= (A+LC)e \end{aligned}$$

L'origine de ce système linéaire est GAS.

5 Autres problèmes de la théorie du contrôle

5.1 Contrôle optimal

Dans un problème de contrôle optimal, en plus du modèle

$$\dot{x} = f(x,u)$$

on se donne un état initial $x(0) = x_0$, une cible $x(T) = x_1$ et une fonction coût

$$\mathcal{C}(u) = \int_0^T L(x(t), u(t))dt$$

que l'on se propose de minimiser. Ainsi il faut chercher, parmi les contrôles admissibles, $u(\cdot)$ celui qui réalise

$$\min_u \mathcal{C}(u), \qquad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Lorsque T est fini, le problème de contrôle optimal est dit en horizon fini. Lorsque $T = +\infty$ on parle d'optimisation en horizon infini. Pour plus de détails voir [4]. On discute simplement ici un problème d'optimisation en horizon infini pour le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

et le coût quadratique

$$\mathcal{C}(u) = \int_0^{+\infty} [u(s)'Ru(s) + x(s)'Qx(s)]\, ds, \qquad x(0) = x_0, \quad x(+\infty) = 0 \quad (20)$$

où R et Q sont des matrices symétriques définies positives. On a le résultat suivant (voir [1] pour la preuve).

Théorème 11 *Supposons qu'il existe une matrice symétrique positive S, telle que S soit solution de l'équation de Ricatti algébrique :*

$$A'S + SA - SBR^{-1}B'S + Q = 0, \quad (21)$$

telle que la matrice $A - BR^{-1}B'S$ soit de Hurwitz. Alors le minimum du critère (20) vaut

$$\min_u \mathcal{C}(u) = x_0'Sx_0.$$

De plus ce minimum est atteint pour la commande

$$u^*(t) = -R^{-1}B'Sx^*(t)$$

où $x^*(t)$ est la solution du système

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B'S)x$$

de condition initiale $x^*(0) = x_0$.

Une condition suffisante pour que l'équation de Ricatti algébrique (21) admette une solution est que la paire (A, B) soit commandable (voir [13], p. 198). Si S est une solution de (21) alors la matrice $A - BR^{-1}B'S$ est de Hurwitz. En effet l'équation (21) s'écrit

$$(A - BR^{-1}B'S)'S + S(A - BR^{-1}B'S) + Q + SBR^{-1}B'S = 0. \tag{22}$$

C'est l'équation de Lyapounov (16). La matrice

$$SBR^{-1}B'S = (R^{-1}B'S)'R(R^{-1}B'S)$$

est positive et la matrice Q est définie positive. Comme l'équation (22) admet la solution S, on en déduit que la matrice $A - BR^{-1}B'S$ est de Hurwitz. Pour plus de détails voir [18].

5.2 Contrôles discontinus

Nous considérons maintenant un autre type de problème de contrôle optimal : le problème de contrôle en temps minimum. Prenons par exemple le système :

$$\dot{x} = f^0(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x); \quad \sum_{i=1}^{p} u_i^2 \leq 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

et supposons pour commencer que f^0 est identiquement nul, que $p = n$ et que les champs de vecteurs f^i sont linéairement indépendant en tous points. Il est alors facile de se convaincre que le problème de la recherche d'un contrôle en temps minimum pour aller d'un point à un autre est le mme que celui de la recherche de l'arc de longueur minimale qui relie ces deux points pour la métrique riemannienne définie comme suit : le produit scalaire de deux vecteurs V et W est

$$< V, W >_x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \beta_i; \quad V = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f^i; \quad W = \sum_{i=1}^{p} \beta_i f^i$$

Bien entendu lorsque f^0 n'est pas nul et $p < n$ le problème de contrôle en temps minimum ne se réduit plus à une question de géométrie riemannienne et les techniques classiques du calcul des variation ne s'appliquent plus. Des conditions nécessaires d'optimalité qui portent le nom de “principe du maximum” ont été établies et il s'avère que les trajectoires optimales pour le retour à l'origine n'ont plus la structure régulière des géodésiques issues d'un point. Nous le voyons sur l'exemple très simple suivant, dit du “chauffeur homicide” :

$$\ddot{x} = u, \qquad |u| \leq 1$$

Les trajectoires optimales sont manifestement des trajectoires pour lesquelles u vaut $+1$ puis est suivi de -1 et inversement. Sur la figure 1 de [4] on voit que le contrôle en boucle fermée qui correspond aux trajectoires optimales vaut $+1$ au dessous de la courbe ζ , -1 au dessus. Ce qui pose le problème de la définition d'une équation différentielle à second membre discontinu. On est amené à construire des lois de commande discontinues du type

$$u(x) = \begin{cases} u^{+}(x) \text{ si } s(x) > 0 \\ u^{-}(x) \text{ si } s(x) < 0 \end{cases}$$

Le système en boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x))$ associé à cette loi de commande est en général discontinu. La notion usuelle de solution d'une équation différentielle ne s'applique plus et on parle de solution au sens de Filippov. On obtient la notion de *contrôle en mode glissant*. Pour plus de détails voir [4, 15].

5.3 Perturbations singulières

Dans les modèles réels coexistent souvent des dynamiques très diversifiées comportant deux ou même plusieurs échelles de temps. Une façon simple de décrire ces échelles est de considérer que les modèles étudiés dépendent d'un petit paramètre ε et de les voir alors comme des perturbations du problème obtenu en posant $\varepsilon = 0$. Cette démarche conduit à des méthodes spéciales de stabilsation [16].

References

[1] **B. D'Andréa-Novel, M. Cohen de Lara**, *Cours d'automatique, Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Les Presses de l'Ecole des Mines, Paris (2000).

[2] **O. Bernard, J.-L. Gouzé**, *Estimation d'état*, in *Automatique des bioprocédés*, D. Dochain, (ed.) Traité IC2, série systèmes automatisés, Hermes, Sciences, Paris, 2001, pages 87–120.

[3] **O. Bernard, I. Queinnec**, *Modèles dynamiques et procédés biochimiques. Propriétés des modèles*, in *Automatique des bioprocédés*, D. Dochain, (ed.) Traité IC2, série systèmes automatisés, Hermes, Sciences, Paris, 2001, pages 23–52.

[4] **U. Boscain, B. Piccoli**, *An Introduction to Optimal Control*, ce volume.

[5] **R. Chabour**, *Fonctions de Lyapounov et stabilité des systèmes déterministes*. `http://poncelet.sciences.univ-metz.fr/ chabour/`

[6] **J. M. Coron**, *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilsation des systèmes non linéaires*, cours donné dans "Les journées mathématiques X-UPS en 1999". `http://math.polytechnique.fr/xups/vol99.html`

[7] **J. M. Coron**, *On the stabilization of some nonlinear control systems: results, tools, and applications*, Nonlinear analysis, Differential Equations and Control (Montreal, QC, 1998), 307–367, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 528, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[8] **J. M Coron**, *Return method: some applications to flow control* Mathematical control theory, Part 1, 2 (Trieste, 2001), 655–704 (electronic), ICTP Lect. Notes, VIII, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2002. `http://www.ictp.trieste.it/`

[9] **R. David, H. Alla**, *Du Grafcet aux Réseaux de Petri*, Deuxième édition revue et augmentée, Traité des nouvelles technologies, série Automatique, Editions Hermès, Paris, 1992.

[10] **J. P. Gauthier, I. Kupka** *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001

[11] **V. Jurdjevic**, *Geometric Control Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 51, Cambridge university press, 1997

[12] **H. K. Khalil**, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall (1996).

[13] **E. B. Lee, L. Markus**, *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New-York (1967).

[14] **C. Lobry** *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, in Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal, vol. 1, éditions du CNRS 1981, 187-214.

[15] **C. Lobry, T. Sari**, *Equations différentielles à second membre discontinu*, ce volume.

[16] **C. Lobry, T. Sari**, *Singular Perturbations Methods in Control Theory*, ce volume.

[17] **S. Micu, E. Zuazua**, *An Introduction to the Controlability of Partial Differential Equations*, ce volume.

[18] **G. Sallet**, *Théorie du contrôle et équations algébriques de Ricatti*, ce volume.

[19] **W. M. Wonham**, *Notes On Control of Discrete Event Systems* University of Toronto. `http://odin.control.toronto.edu/DES/`

C. L.
INRIA Sophia Antipolis,
2004, route des Lucioles, B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
`Claude.Lobry@inria.fr`

T. S.
Laboratoire de Mathématiques,
4 rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse
`Tewfik.Sari@uha.fr`