

Equations différentielles à second membre discontinu

Claude Lobry

Tewfik Sari

1 Introduction

Après une introduction justifiant l'intérêt de l'étude des équations différentielles à second membre discontinu nous proposons trois approches différentes de la question. La première, celle de Filippov est ancienne et bien connue. Les deux autres, qui, on le verra, sont élémentaires, se retrouvent de façon plus ou moins cachée dans la littérature, mais ne semblent pas avoir fait l'objet d'un exposé didactique. Pour éviter que des difficultés techniques ne cachent des idées très simples nous nous restreindrons à des fonctions *discontinues régulières* de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 . Nous entendons par là la généralisation naturelle de fonctions continues par morceaux. C'est-à-dire des fonctions définies par la donnée d'un nombre fini de sous variétés régulièrement plongées se coupant transversalement telles que le complémentaire de leur réunion soit constitué localement d'un nombre fini d'ouverts ; sur chacun de ces ouverts la fonction est la restriction d'une fonction différentiable définie sur l'espace tout entier. Pour simplifier encore nous supposerons que les fonctions sont globalement bornées. La généralisation des résultats exposés à des fonctions régulières définies sur des espaces de dimension supérieure et à des fonctions non bornées, voire des fonctions admettant des points d'accumulation de discontinuités, est immédiate. En revanche la généralisation à des fonctions mesurables quelconques nous semble poser quelques problèmes que nous n'abordons pas. D'un point de vue pratique, les fonctions discontinues régulières sont suffisantes. Les trois approches sont comparées et des simulations sont présentées en dimension 2 et dimension 3. En conclusion nous montrons pourquoi il n'existe pas de concept de solution meilleur qu'un autre dans l'absolu. Tout est une question de modélisation et c'est la réalité de ce qui est représenté par les équations qui doit nous indiquer le meilleur choix.

Définition 1 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On appelle solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

une application continue, différentiable en tout point, $t \mapsto x(t)$, telle que $x(0) = x_0$ et qui sur tout l'intervalle $[0, T]$ satisfait la relation $x'(t) = f(x(t))$.

Une fonction $t \mapsto x(t)$ est solution du problème de Cauchy (1) si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Soit maintenant la fonction non continue très simple :

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = +1, \quad f(0) = a, \quad x > 0 \Rightarrow f(x) = -1, \quad (2)$$

et voyons ce que pourrait être une solution du problème de Cauchy de condition initiale $x(0) = 1$. Tant que x est strictement positif nous prenons la définition classique, ce qui donne donc $x(t) = 1 - t$ tant que t est strictement plus petit que 1. Comment continuer la solution ? On voit qu'il n'est pas possible de "traverser" l'axe $x = 0$ car, sitôt que x est négatif, il faut "remonter". Il faut que la solution reste le long de l'axe $x = 0$ (voir Fig. 1, à gauche). Le problème est donc de trouver une définition qui accepte que les solutions de condition initiale 0 restent identiquement nulles puisqu'on ne peut ni remonter ni descendre. La formulation intégrale ne résout pas la question puisqu'elle exige les identités ci-dessous :

$$x(t) \equiv 0 \equiv \int_0^t f(x(s))ds \equiv at.$$

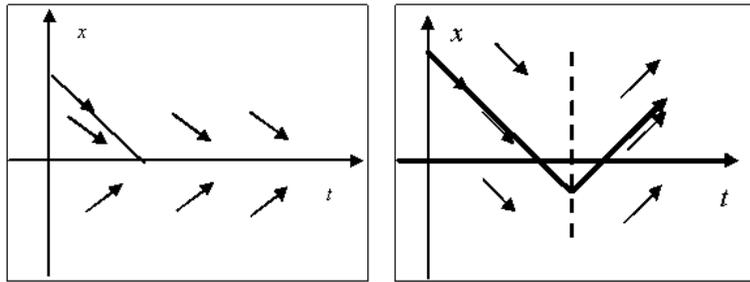


Figure 1: Les champs de vecteurs discontinus (2) à gauche, et (3), à droite.

Une notion de *solution faible* comme :

$$\int_0^T \varphi(t)x'(t)dt = \int_0^T \varphi(t)f(x(t))dt$$

pour toute fonction φ , C^∞ à support compact ne convient pas non plus car pour $x(t)$ identiquement nul elle impose aussi que a soit nul.

Il ne faut pas confondre le problème des équations différentielles à second membre discontinu avec celui des équations de la forme $x'(t) = f(x(t), t)$ où la fonction f est continue par rapport à la variable x et localement intégrable par rapport à la variable t . Dans ce cas, une solution du problème de Cauchy sera une fonction absolument continue¹ telle que :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), s) ds, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Pour voir que ce cas ne pose pas de problème il suffit d'imaginer qu'il y a une seule discontinuité en $t = 1$.

$$t < 1 \Rightarrow f(x, t) = -1, \quad t > 1 \Rightarrow f(x, t) = 1. \quad (3)$$

Jusqu'en $t = 1$ nous avons un problème régulier, la solution du problème de Cauchy tend vers une limite que nous reprenons comme condition initiale pour $t = 1$ (voir Fig. 1, à droite).

Donc, le point de vue de la Définition 1 oblige à se restreindre à des fonctions f qui sont continues de la variable d'état x . Or il y a de bonnes raisons à vouloir considérer des équations où le second membre est discontinu. En voici quelques exemples :

Exemple 1 Un premier exemple classique, traité par Andronov, Vitt et Chaikin [1] est celui des forces de "frottement sec" qui, en première approximation, sont de module constant et opposées à la vitesse. Pour le dispositif mécanique de la Fig. 2 cela donne

$$x''(t) + \alpha(\operatorname{sgn}(x'(t))) + kx(t) = 0.$$

Dans l'espace des phases, on obtient les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -kx - \alpha, \end{cases} \quad \text{si } y \text{ est positif,} \quad \begin{cases} x' = y, \\ y' = -kx + \alpha, \end{cases} \quad \text{si } y \text{ est négatif.} \quad (4)$$

Tout le segment $[-\alpha/k, +\alpha/k]$ de l'axe des x est constitué de points fixes, car, sur ce dernier, la force de rappel du ressort n'est pas capable de vaincre la force de frottement (voir Fig. 2, et Remarque 1).

Exemple 2 Soit le système contrôlé :

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - y^2(t) + (u - 1)(u + 1), \\ y'(t) &= u, \end{aligned} \quad -1 \leq u \leq 1,$$

¹Les fonctions absolument continues sont les fonctions dérivables presque partout qui ont la propriété d'être la primitive de leur dérivée, ce qui n'est pas le cas de la fonction de Cantor qui est continue, monotone, croissante de 0 à 1 et dont la dérivée, définie presque partout, est nulle.

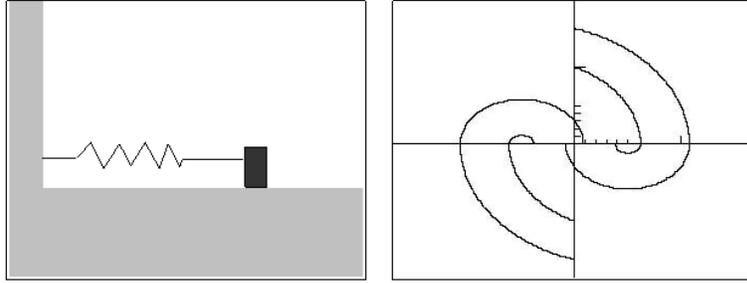


Figure 2: Ressort avec frottement sec et portrait de phase du champ discontinu (4) correspondant. Dans le demi plan $y > 0$, les trajectoires sont des ellipses centrées en $(-\alpha/k, 0)$, d'équations $y^2 + (kx + \alpha)^2 = \text{Constante}$. Dans le demi plan $y < 0$, les trajectoires sont des ellipses centrées en $(\alpha/k, 0)$, d'équations $y^2 + (kx - \alpha)^2 = \text{Constante}$.

et supposons que nous désirions nous rendre le plus vite possible du point $(0, 0)$ au point $(1, 0)$. Si nous prenons le contrôle $u = 0$ nous avons :

$$x'(t) = -y^2(t), \quad y'(t) = 0,$$

ce qui ne convient pas. Si nous faisons $u = -1$ nous avons :

$$x'(t) = 1 - y^2(t), \quad y'(t) = -1,$$

et pour $u = 1$ nous avons :

$$x'(t) = 1 - y^2(t), \quad y'(t) = 1.$$

Nous voyons que pour aller le plus vite possible vers le point $(1, 0)$ il convient de s'éloigner le moins possible de l'axe des x , donc prendre -1 si y est positif et vice-versa. Considérons le champ défini par

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - y^2(t) + (u(x, y) - 1)(u(x, y) + 1), \\ y'(t) &= u(x, y), \end{aligned}$$

$$\text{avec } u(x, y) = \begin{cases} -1 & \text{si } y > 0 \\ \text{indeterminé} & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Ce champ n'est pas continu le long de $y = 0$, toutefois nous serions prêts à accepter qu'il possède la solution $(x(t) = t, y(t) = 0)$, qui serait considérée comme la limite des solutions $(x_n(t), y_n(t))$ des systèmes

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - y^2(t) + (u_n(t) - 1)(u_n(t) + 1), & x(0) &= 0, \\ y'(t) &= u_n(t), & y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

où les fonctions $u_n(t)$ sont définies par la Fig. 3.

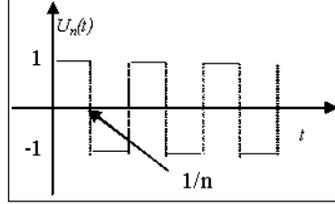


Figure 3: Le contrôle $u_n(t)$ correspondant au système (5).

Exemple 3 Un dernier exemple (proposé par Brunovsky [7]) est le suivant. On considère le système :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + u_1, \\ x_2'(t) &= x_2(t) + u_2, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \text{conv} \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \quad (6)$$

$$\text{avec } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et $\text{conv}\{A\}$ désigne l'enveloppe convexe des éléments de l'ensemble A . On cherche la rétroaction qui assure le retour des points de la bande $|y| < 1$ à l'origine en temps minimum. L'application du principe du maximum de Pontriaguine permet de voir immédiatement que les trajectoires optimales correspondent aux points extrémaux du convexe représenté dans la Fig. 4. On se convainc facilement que la fonction discontinue ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{cases} w_4 & \text{si } x_2 > 0, \\ w_3 & \text{si } x_2 < 0, \\ w_2 & \text{si } x_2 = 0 \text{ et } x_1 > 0, \\ w_1 & \text{si } x_2 = 0 \text{ et } x_1 < 0, \end{cases} \quad (7)$$

définit un champ discontinu dont les *solutions naïves* sont optimales (voir Fig. 4).

Par *solutions naïves*, nous entendons le concept suivant qui a été développé pour les synthèses de contrôle optimal et que nous appellerons *solutions naïves de champs différentiables par morceaux*. On se donne dans \mathbb{R}^2 une partition de l'espace constituée d'ouverts O_i , considérés comme des sous variétés de dimension 2, de courbes (localement en nombre fini) C_i considérés comme des sous variétés de dimension 1 (sans bord et régulièrement plongées), et de points P_i . Sur ces variétés l'on se donne des champs de vecteurs réguliers (au minimum continus). Les solutions sont définies comme le raccordement "bout à bout" de solutions définies sur les sous variétés. Pour plus de détails sur ces solutions, on pourra se reporter à l'article de Boltyanskii [6].

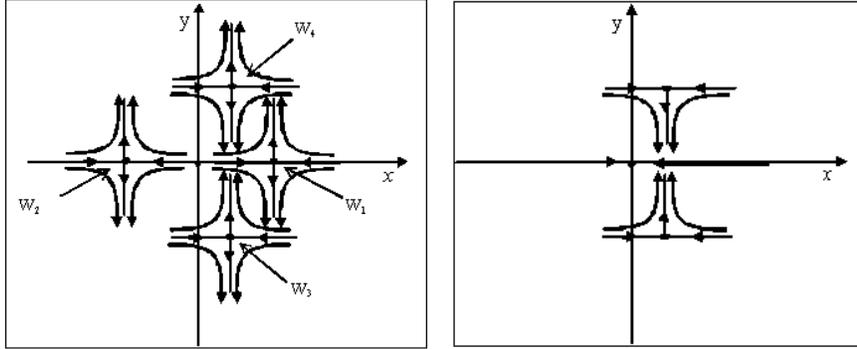


Figure 4: Trajectoires associées aux quatre valeurs extrémales du contrôle du système (6) (à gauche) et solutions naïves de la synthèse du problème de contrôle en temps minimum (7) correspondant (à droite).

Dans [7] Brunovsky critique ces solutions naïves, nous verrons pourquoi au paragraphe suivant (voir Remarque 2).

Cette situation est tout à fait typique du problème qui se pose en automatique. Supposons que nous ayons un système entrée-sortie : $x' = f(x, u)$; $x \in U$ et supposons que pour des raisons diverses nous ayons défini une rétroaction, c'est-à-dire une application : $x \mapsto u(x)$. Il est très fréquent que cette rétroaction présente des discontinuités définies par des inégalités et égalités. Le système bouclé $x' = f(x, u(x))$ est, dans ce cas, une équation différentielle à second membre discontinu.

2 Les solutions de Filippov

Dans [8] Filippov a proposé la définition suivante. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application bornée mesurable. On définit l'ensemble :

$$\Gamma(x) = \bigcap_{r>0, \mu(S)=0} \overline{\text{conv}\{f(B(x, r) \setminus S)\}} \quad (8)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule de rayon r centrée en x et S n'importe quel ensemble de mesure de Lebesgue nulle contenu dans $B(x, r)$ et la barre supérieure la fermeture.

Définition 2 Une solution (de Filippov) du problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

est une fonction absolument continue : $t \mapsto x(t)$, $t \in [0, T]$, telle que $x(0) = x_0$ et

$$x'(t) \in \Gamma(x(t)), \quad (9)$$

pour presque tout $t \in [0, T]$.

Les équations de type (9) s'appellent des inclusions différentielles. Elles font l'objet de nombreux travaux [3] et constituent l'outil mathématique de base de la théorie de la viabilité [4]. Sous des hypothèses assez générales, lorsque l'ensemble $\Gamma(x)$ est convexe pour tout x , on peut montrer l'existence locale d'une solution. Les inclusions différentielles sont étudiées, entre autres raisons, pour leurs applications à l'automatique. En effet, soit le système entrée-sortie :

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x(t), u(t)), & u &\in U \\x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Notons :

$$F(x) = \{f(x, u) : u \in U\}$$

pour tout contrôle $t \mapsto u(t)$ la solution correspondante $t \mapsto x(t, u(\cdot), x_0)$ est solution de l'inclusion différentielle

$$x'(t) \in F(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Toutefois le lien entre les inclusions différentielles et les équations différentielles réserve une petite surprise. Prenons par exemple :

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)u, & u &\in \mathbb{R} \\x(0) &= 0.\end{aligned}$$

quel que soit le contrôle $u(\cdot)$, la solution correspondante $x(t, u(\cdot), 0)$ est identiquement nulle. Prenons l'inclusion différentielle correspondante :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \text{avec } F(x) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

L'application $t \mapsto t^2$, qui n'est pas identiquement nulle, est une solution de cette inclusion différentielle.

Examinons maintenant sur des exemples ce que peuvent être les solutions de Filippov.

Exemple 4 La *discontinuité stable*. Soit le champ de \mathbb{R}^2 , représenté dans la Fig. 5 et défini pour y positif et y négatif respectivement, ainsi que sur l'axe des x par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0 \quad (10)$$

Plaçons nous pour commencer en un point (x, y) qui n'est pas sur l'axe des x , au dessus par exemple. La définition de Γ (8) nous invite à considérer une boule de rayon r centrée en (x, y) et à prendre l'image de cette boule par la fonction f , après en avoir

retiré un ensemble de mesure nulle. Comme f est constante sur la boule (si le rayon est assez petit), quel que soit le rayon et l'ensemble retiré le résultat est toujours le même : la valeur de f au point (x, y) . Donc :

$$\Gamma(x, y) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ si } y > 0$$

et de même, au dessous de l'axe des x :

$$\Gamma(x, y) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ si } y < 0$$

Les choses sont plus intéressantes sur l'axe des x . Sur toute boule centrée en $(x, 0)$ la fonction f prend trois valeurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous enlevons un ensemble de mesure nulle les deux premières valeurs sont toujours prises, en revanche, si nous enlevons l'axe des x la troisième valeur n'est plus prise. Donc, dans ce cas, on a :

$$\Gamma(x, 0) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La première constatation est donc que la définition ne change rien aux points où f est continue. La seconde est que, là où il y a discontinuité, ce qui se passe sur les ensem-

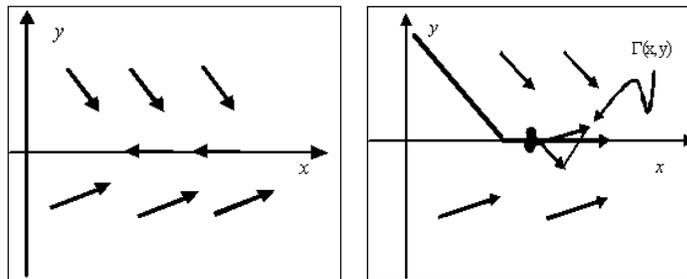


Figure 5: Le champ de vecteurs discontinu (10) et sa vitesse au sens de Filippov sur la ligne de discontinuité.

bles de mesure nulle est non pertinent. La définition de Γ oublie ce que nous avions dit de la définition de f sur l'axe des x . Les solutions de l'inclusion différentielle sont,

bien entendu :

$$\begin{array}{ll} t \mapsto (x_0 + t, y_0 - t) & \text{dans le demi-plan supérieur,} \\ t \mapsto (x_0 + 3t, y_0 + t) & \text{dans le demi-plan inférieur} \\ t \mapsto (x_0 + 2t, 0) & \text{le long de l'axe des } x. \end{array}$$

Cette dernière affirmation se voit en constatant que toute solution issue de $(x_0, 0)$ ne peut pas quitter l'axe des x et que sa vitesse horizontale est déterminée par le seul vecteur horizontal de $\Gamma(x, 0)$ (voir Fig. 5).

Avant de faire des commentaires plus généraux nous examinons deux autres cas particuliers en laissant au lecteur le soin de se convaincre des résultats annoncés.

Exemple 5 La *discontinuité instable*. Soit le champ de \mathbb{R}^2 , représenté dans la Fig. 6 et défini par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0 \quad (11)$$

Les solutions de Filippov en sont :

$$\begin{array}{ll} t \mapsto (x_0 + 3t, y_0 + t) & \text{dans le demi-plan supérieur,} \\ t \mapsto (x_0 + t, y_0 - 3t) & \text{dans le demi-plan inférieur,} \\ t \mapsto (x_0 + 2t, 0) & \text{le long de l'axe des } x \text{ puis suivre n'importe quelle} \\ & \text{solution du demi plan supérieur ou inférieur.} \end{array}$$

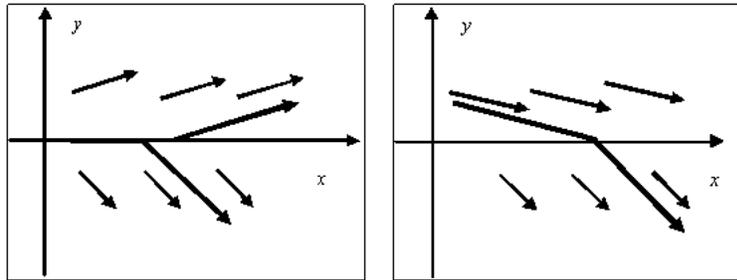


Figure 6: Les champs de vecteurs discontinus (11) à gauche, et (12), à droite.

Exemple 6 La *discontinuité perméable*. Soit le champ de \mathbb{R}^2 , représenté dans la Fig. 6 et défini par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0 \quad (12)$$

Les solutions de Filippov en sont :

$$\begin{array}{ll} t \mapsto (x_0 + 3t, y_0 - t) & \text{dans le demi-plan supérieur, suivies de,} \\ t \mapsto (x_0 + t, y_0 - t) & \text{dans le demi-plan inférieur.} \end{array}$$

Ainsi, la discontinuité est simplement traversée.

Il est très facile de démontrer le résultat suivant :

Proposition 1 *Soit f une fonction continue définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Les solutions classiques et les solutions de Filippov de coïncident.*

Les champs discontinus présentent des nouveaux types de points stationnaires le long des lignes de discontinuités, dont nous donnons un exemple ci-dessous.

Exemple 7 Soit le champ de \mathbb{R}^2 , représenté dans la Fig. 7 et défini par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -1 \end{pmatrix} \text{ si } y > 0, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } y < 0 \quad (13)$$

et $f(x, 0)$ est non défini. L'origine est un point stationnaire asymptotiquement stable du système (13)

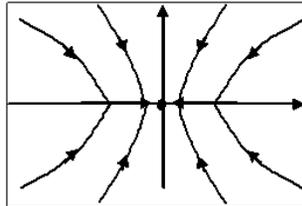


Figure 7: Point stationnaire, sur la ligne de discontinuités du champ de vecteurs discontinu (13).

Remarque 1 Reprenons maintenant l'Exemple 1 du frottement sec. Nous avons le champ (4). Le long du segment $[-\alpha/k, +\alpha/k]$ de l'axe des x , noté S , le convexe $\Gamma(x, 0)$ est le segment vertical $[-kx - \alpha, -kx + \alpha]$ et tous les points de S sont des points stationnaires. Le concept de solution de Filippov rend donc bien compte du phénomène physique.

Remarque 2 Prenons maintenant l'Exemple 3 de la synthèse du contrôle optimal. Dans la Fig. 8, à gauche nous avons tracé le *portrait de phase naïf*, à droite celui donné par les *solutions de Filippov*. On voit que, loin d'être optimales pour le retour à 0 en temps minimum, comme le sont les solutions naïves de la synthèse, les solutions de Filippov convergent vers le point $(0.5, 0)$! Dans son article Brunovsky argumente

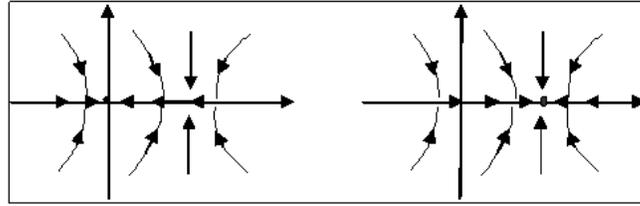


Figure 8: Solutions naïves (à gauche) et solutions de Filippov (à droite) du système (7).

que les solutions de Filippov sont plus réalistes que les solutions naïves. En effet, imaginons que nous implémentions notre synthèse sur un dispositif physique. Il faudra des capteurs pour décider où se trouve l'état (x, y) du système. L'état correspondant à l'axe des x étant de mesure nulle n'a aucune chance d'être repéré par un quelconque capteur. En réalité on détectera en permanence tantôt y positif, tantôt y négatif, d'où un "crépitement" autour de la valeur $y = 0$ qui est bien rendu par le concept de solution de Filippov.

3 Equations différentielles et schéma d'Euler perturbé

Dans ce paragraphe, nous abordons, dans le cas d'un second membre discontinu, le point de vue classique qui consiste à voir dans une équation différentielle la limite d'une récurrence discrète de pas de plus en plus petit.

Définition 3 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application bornée ($\|f(x)\| \leq M$). Une marche de pas infinitésimal est la famille suivante de suites :

$$x_0^h = x_0 \text{ donné}, \quad x_{t+h}^h = x_t^h + hf(x_t^h), \quad h > 0,$$

que nous considérerons (par interpolation linéaire) comme une famille d'applications continues $t \mapsto x^h(t)$ de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^n .

Comme f est bornée, on vérifie immédiatement qu'une telle famille est équicontinue et bornée et donc, d'après le théorème d'Ascoli, elle possède des valeurs d'adhérence. Ces valeurs d'adhérence sont les *traces* de la marche infinitésimale. On remarquera que, dans cette définition, il est inutile de supposer que f est continue, ni même mesurable (l'équicontinuité vient de ce que les pas sont majorés par hM). D'autre part il est bien connu (c'est une démonstration possible de l'existence des solutions d'une équation différentielle) et facile de démontrer que, si f est continue, les traces des marches de pas infinitésimal sont des fonctions dérivables $t \mapsto x(t)$, solution du problème de Cauchy $x'(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$.

Les traces de marches de pas infinitésimale sont donc des candidates valables pour être des solutions d'équations différentielles à second membre discontinu, mais nous ne les retiendrons pas pour la raison suivante.

Exemple 8 Soit $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. Toutes les suites de condition initiale 0 sont identiquement nulles. La trace de la marche infinitésimale issue de ce point est donc la fonction $t \mapsto x(t) = 0$. Le caractère instable de 0 n'est pas perçu par cette définition. En voici une nouvelle qui tente de pallier ce défaut :

Définition 4 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application bornée ($\|f(x)\| \leq M$). Une marche de pas infinitésimal perturbée est la famille suivante de suites :

$$x_0^{h,\varepsilon} = x_0 \text{ donné}, \quad x_{t+h}^{h,\varepsilon} = x_t^{h,\varepsilon} + h \left[f \left(x_t^{h,\varepsilon} \right) + \varepsilon_t^h \right], \quad h > 0,$$

où les suites ε_t^h parcourent l'ensemble des suites indexées par h satisfaisant les propriétés

$$\varepsilon_t^h \neq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_t^h = 0.$$

Comme précédemment nous considérerons (par interpolation linéaire) ces suites comme des applications continues, elles sont encore équi continues. Les valeurs d'adhérence de ces suites sont les *traces* de la marche infinitésimale perturbée.

Avec cette définition, nous voyons apparatre dans l'Exemple 8 des solutions qui quittent l'origine. L'idée de cette définition est claire : nous devons imaginer que notre système physique est soumis à un petit bruit qui fait que le résultat d'un pas peut être légèrement différent de ce que f prédisait. Mais il existe une autre manière de traduire l'incertitude. C'est de supposer qu'à chaque pas la valeur qui est "observée" pour l'état x du système n'est pas exactement ce qu'elle est en réalité. Nous introduisons une erreur d'observation, ce qui donne une nouvelle définition :

Définition 5 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application bornée ($\|f(x)\| \leq M$). Une marche de pas infinitésimal perturbée est la famille suivante de suites :

$$x_0^{h,\varepsilon} = x_0 \text{ donné}, \quad x_{t+h}^{h,\varepsilon} = x_t^{h,\varepsilon} + hf \left(x_t^{h,\varepsilon} + \varepsilon_t^h \right), \quad h > 0,$$

où les suites ε_t^h parcourent l'ensemble des suites indexées par h satisfaisant les propriétés

$$\varepsilon_t^h \neq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_t^h = 0.$$

Comme précédemment nous considérerons (par interpolation linéaire) ces suites comme des applications continues, elles sont encore équi continues. Les valeurs d'adhérence de ces suites sont les *traces* de la marche infinitésimale à observation perturbée. Il est facile de vérifier que lorsque f est continue les traces des marches infinitésimales perturbées, ou à observation perturbée, sont des solutions classiques du

problème de Cauchy correspondant. Mais ces deux définitions ne sont pas totalement satisfaisantes en raison de l'exemple suivant.

Exemple 9 Soit $f(x) = 1$ si x est rationnel, 0 sinon. Nous voudrions bien que cette équation différentielle n'ait pas d'autre solution que la solution $t \mapsto x(t) = 0$, comme le fait le concept de solution de Filippov. Or que ce soit avec l'une ou l'autre des définitions précédentes si nous prenons h rationnel et des suites ε_t^h à valeurs rationnelles nous aurons $t \mapsto x(t) = t$ comme trace possible.

4 Régularisation par convolution

Les deux méthodes exposées en dans les Sections 2 et 3 ne sont pas “constructives” dans le sens suivant : Supposons que nous voulions calculer avec un ordinateur des solutions de Filippov. Nous pouvons imaginer un schéma d'Euler du genre :

$$x(t+h) = x(t) + hy, \quad y \in \Gamma(x(t)),$$

mais nous devons “indiquer” à l'ordinateur comment choisir un élément y dans l'ensemble $\Gamma(x(t))$. De même, dans le cas d'un schéma d'Euler perturbé, nous devons dire comment sont choisies les suites perturbatrices. Nous proposons dans ce paragraphe un procédé plus constructif. On note $\Phi = \{\varphi_\lambda : \lambda > 0\}$ une famille de lois de probabilités sur \mathbb{R}^n définies par une densité différentiable, telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \varphi_\lambda(x) dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} x^2 \varphi_\lambda(x) dx = 0.$$

Une famille de gaussiennes d'écart type λ est un exemple de telle famille. Soit maintenant une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mesurable et bornée. Le produit de convolution :

$$x \mapsto f * \varphi_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) \varphi_\lambda(x-s) ds$$

définit un champ de vecteur différentiable, donc qui s'intègre sans problème. On note $x(t, \lambda, x_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$x'(t) = f * \varphi_\lambda(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Définition 6 On appelle Φ -solution du problème de Cauchy :

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0.$$

et on note $x(t, \Phi, x_0)$ une application de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^n telle qu'il existe une suite $\lambda_n \rightarrow 0$, une suite $x_n \rightarrow x_0$, telles que $x(t, \lambda_n, x_n)$ converge uniformément vers $x(t, \Phi, x_0)$.

Comme notre famille régularisante est telle que si f est continue $f * \varphi_\lambda(x) \rightarrow f(x)$ nous en déduisons sans difficulté que lorsque f est continue les Φ -solutions sont des solutions classiques. En particulier, lorsque f est lipschitzienne, il y a unicité, donc les Φ -solutions sont indépendantes du choix de la famille Φ . On se convainc facilement que pour des champs discontinus réguliers les Φ -solutions sont des solutions de Filippov.

Les solutions ont une interprétation probabiliste intéressante en terme de bruit sur l'observation. Supposons que nous ayons le système contrôlé :

$$x'(t) = U, \quad U \in \mathbb{R}^n,$$

(ce qui est un peu artificiel, mais nous verrons plus loin comment généraliser) et que pour répondre à une question (par exemple stabiliser en 0), nous avons défini une rétroaction (discontinue) $x \mapsto f(x)$. Nous supposons que f est une fonction discontinue régulière. Supposons que ce système soit implémenté physiquement et que la rétroaction soit calculée pratiquement sur un pas d'échantillonnage très court h , ce qui veut dire qu'entre t et $t + h$ on considèrera f comme constante. L'évolution du système est donc représentée par le schéma d'Euler:

$$x_0^h = x_0 \text{ donné}, \quad x_{t+h}^h = x_t^h + hf(x_t^h)$$

que nous avons déjà considéré. Nous supposons que h est très petit par rapport à la borne M de f (disons que h est de l'ordre de $10^{-6}M$ pour fixer les idées). Nous supposons maintenant que le dispositif physique qui permet de mesurer l'état x n'est pas parfait. Il donne pour résultat $x_t - V_t$ où les V_t sont une famille de variables aléatoires i.i.d. (indépendantes, identiquement distribuées), de moyenne nulle, de variance petite mais grande par rapport à h (un centième de M). Que se passe-t-il pendant 1000 pas de temps consécutifs ? Le point x_t bouge très peu, moins d'un millièmme de M . Nous pouvons imaginer en première approximation qu'il est fixe. Réécrivons le schéma d'Euler :

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= x_t + hf(x_t - V_t) \\ x_{t+2h} &= x_{t+h} + hf(x_{t+h} - V_{t+h}) = x_{t+h} + hf(x_t - V_{t+h}) \\ &\quad + h[f(x_{t+h} - V_{t+h}) - f(x_t - V_{t+h})] \\ &\dots \\ x_{t+(k+1)h} &= x_{t+kh} + hf(x_{t+kh} - V_{t+kh}) = x_{t+kh} + hf(x_t - V_{t+kh}) \\ &\quad + h[f(x_{t+kh} - V_{t+kh}) - f(x_t - V_{t+kh})] \\ &\dots \\ x_{t+1000h} &= x_{t+999h} + hf(x_{t+999h} - V_{t+999h}) = x_{t+999h} + hf(x_t - V_{t+999h}) \\ &\quad + h[f(x_{t+999h} - V_{t+999h}) - f(x_t - V_{t+999h})]. \end{aligned}$$

Les termes correctifs (entre crochet) sont presque toujours petits chaque fois que le bruit V_t nous fait tomber en dehors d'une discontinuité. Si nous négligeons la somme

de toutes ces corrections, il ne nous reste que :

$$x_{t+1000h} = x_t + h \sum_{k=0}^{999} f(x_t - V_{t+kh}),$$

ce qui, si nous posons $\Delta t = 1000h$, donne :

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} f(x_t - V_{t+kh}),$$

En facteur de Δt nous avons la moyenne de 1000 tirages indépendants de la variable aléatoire V_t , soit approximativement son espérance, qui est donnée par le produit de convolution. Nous reconnaissons donc le schéma d'Euler approximatif :

$$x_{t+\Delta t} \approx x_t + \Delta t (f * \varphi_\lambda)(x_t)$$

de l'équation régularisée :

$$x'(t) = f * \varphi_\lambda(x(t))$$

Donc, selon ces arguments heuristiques, les Φ -solutions modélisent une rétroaction réalisée à travers un échantillonnage très rapide, en présence d'un bruit sur l'observation. Le résultat mathématique précis demande l'introduction d'un peu de matériel.

Définition 7 Soit $k \mapsto V_{kh}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi définie par la densité φ_λ . On appelle $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ -schéma d'Euler stochastique le processus stochastique défini par :

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_{(k+1)h} = \xi_{kh} + hf(\xi_{kh} - V_{kh}). \quad (14)$$

Proposition 2 Quand h tend vers 0 le $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ -schéma d'Euler stochastique converge vers le schéma d'Euler déterministe

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t (f * \varphi_\lambda)(x_t)$$

au sens suivant : Il existe une fonction positive $\Delta t \mapsto \Pi(\Delta t)$ tendant vers 0 avec Δt telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(\{\|\xi_{Nh} - x_t + \Delta t (f * \varphi_\lambda)(x_t)\| > \Pi(\Delta t)\}) = 0, \quad \text{ou } Nh = \Delta t.$$

Démonstration Nous donnons une idée d'une démonstration possible dans le cas de fonctions discontinues régulières de \mathbb{R}^3 qui sont, rappelons le, différentiables dans le complémentaire de surfaces qui se coupent transversalement. Comme la propriété à prouver est locale, il n'est pas restrictif de supposer que la fonction f est constante sur le complémentaire de l'intersection de deux plans S_1 et S_2 . Nous comparons la valeur

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t(f * \varphi_\lambda)(x(t))$ à la valeur terminale ξ_{Nh} de la suite définie par le schéma d'Euler stochastique (14) où $Nh = \Delta t$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\xi_{(k+1)h} &= \xi_{kh} + hf(\xi_{kh} - V_{kh}) \\ &= \xi_{kh} + hf(\xi_0 - V_{kh}) + h[f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})],\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\xi_{Nh} = \xi_0 + h \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_0 - V_{kh}) + h \sum_{k=0}^{N-1} [f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})]$$

La première somme peut s'écrire :

$$h \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_0 - V_{kh}) = \Delta t \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_0 - V_{kh}),$$

qui tend, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers

$$\Delta t \mathbb{E}[f(\xi_0 - V_{kh})] = \Delta t(f * \varphi_\lambda)(\xi_0).$$

La seconde somme peut s'écrire :

$$h \sum_{k=0}^{N-1} [f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})] = \Delta t \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})].$$

Or nous avons supposé que f était constante en dehors des deux plans de discontinuité et nous savons que

$$\|\xi_0 - \xi_{kh}\| \leq khM \leq \Delta tM.$$

Cela veut dire que chaque fois que la variable aléatoire $f(\xi_0 - V_{kh})$ prend une valeur distante de $S_1 \cup S_2$ de plus de ΔtM nous sommes certains que la différence

$$[f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})]$$

est nulle et dans le cas contraire elle peut prendre une valeur non nulle toujours inférieure à $2M$. La quantité :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [f(\xi_{kh} - V_{kh}) - f(\xi_0 - V_{kh})]$$

est donc majorée par une quantité qui tend, quand N tend vers l'infini, vers la probabilité :

$$\mathbb{P}(\{\text{dist}(\xi_0 - V, S_1 \cup S_2) > \Delta tM\}) = \Pi(\Delta t).$$

ce qui achève de démontrer la proposition.

Notre argumentation n'a utilisé que des résultats tout à fait élémentaires de la théorie des probabilités (la loi faible des grands nombres). Pour étendre notre proposition à des situations où la fonction f est simplement mesurable on pourrait, par exemple, adapter des résultats plus généraux (et plus difficiles) de [5] mais cela suppose une intrusion plus profonde dans la théorie des probabilités. Voyons maintenant comment étendre ce résultat à un système contrôlé plus réaliste. Soit le système entrée-sortie :

$$x'(t) = f(x(t), u), \quad y = g(x),$$

pour lequel on a défini la boucle de rétroaction $u = r(y)$ que nous imaginons discontinue. Le système bouclé est donc l'équation différentielle à second membre discontinu :

$$x'(t) = f(x(t), r(g(x(t))))). \quad (15)$$

Nous supposons maintenant que la rétroaction est réalisée pratiquement à travers un *échantillonnage de pas de temps h* . Ce qui veut dire que, à chaque instant kh , on observe l'état $y(kh) = g(x(kh))$ et pendant l'intervalle de temps $[kh, (k+1)h]$ on maintient le contrôle constant à la valeur $u_k = r(g(x(kh)))$, (en anglais, ce type de contrôle s'appelle "sample and hold").

Si r est continue, quand h tend vers 0, les solutions du système échantillonné convergent vers les solutions du système bouclé. Supposons maintenant que r ne soit pas continue et qu'il y ait un bruit sur l'observation, c'est-à-dire que : $y(kh) = g(x(kh)) + V_{kh}$ où les V_{kh} constituent une suite i.i.d. de loi définie par la densité φ_λ . Soit $x \mapsto F^{f,g,r,\varphi_\lambda}(x)$ le champ de vecteur défini par :

$$F^{f,g,r,\varphi_\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, r(g(x) + s)) \varphi_\lambda(s) ds$$

en reprenant les idées de la proposition précédente on démontrerait sans difficulté proposition ci-dessous :

Proposition 3 *Quand le pas h d'échantillonnage du système tend vers 0, les solutions du système échantillonné ("sample and hold") correspondant à (15) convergent en probabilité vers les solutions du système :*

$$x'(t) = F^{f,g,r,\varphi_\lambda}(x(t)).$$

5 Champs de \mathbb{R}^2 discontinus le long d'une courbe

Nous regardons ce que sont les Φ -solutions quand f est un champ de \mathbb{R}^2 discontinu le long d'une courbe. Dans tout ce paragraphe, nous considérons une fonction régulière g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définissant la courbe $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$. Nous supposons que le champ de vecteur f est la restriction à $O^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) > 0\}$ (respectivement $O^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) < 0\}$) d'un champ f^+ (resp. f^-) différentiable de \mathbb{R}^2 .

5.1 Champs traversant la courbe

Nous supposons que dans un ouvert O nous avons pour tout point x de S :

$$\langle f^+(x), \text{grad}g(x) \rangle > 0, \text{ et } \langle f^-(x), \text{grad}g(x) \rangle > 0.$$

Nous disons alors que le champ est traversant.

Proposition 4 *Dans l'ouvert O les Φ -solutions de f sont des courbes intégrales de f^- qui, éventuellement, rencontrent transversalement S en un point x_1 où elles se prolongent en une courbe intégrale du champ f^+ .*

Démonstration : Trivial (Voir Fig. 9).

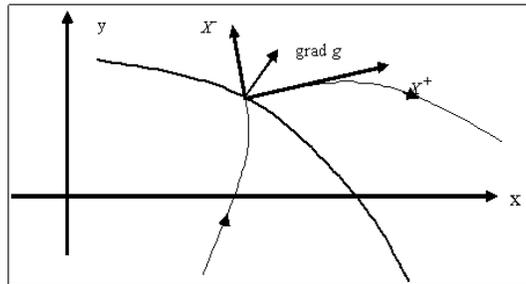


Figure 9: Champ de vecteurs traversant.

5.2 Champs convergent vers la courbe de discontinuité

Nous supposons que dans un ouvert O nous avons pour tout point x de S :

$$\langle f^-(x), \text{grad}g(x) \rangle > 0, \text{ et } \langle f^+(x), \text{grad}g(x) \rangle < 0$$

Nous disons que le champ est convergent vers S .

Exemple 10 Nous considérons le champ $f = (f_1, f_2)$ de \mathbb{R}^2 défini par :

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ 1.3 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } x_2 > 0, \\ 2 & \text{si } x_2 < 0. \end{cases}$$

Le champ est indéterminé si $x_2 = 0$. Notons :

$$P_\lambda^+(x_1, x_2) = \int_{s_2 > 0} \varphi_\lambda(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2,$$

$$P_{\lambda}^{-}(x_1, x_2) = \int_{s_2 < 0} \varphi_{\lambda}(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2.$$

Nous avons évidemment :

$$f_2 * \varphi_{\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f_2(s) \varphi_{\lambda}(s) ds = 2P_{\lambda}^{-}(x) - P_{\lambda}^{+}(x),$$

d'où nous déduisons que la seconde composante du champ $f * \varphi_{\lambda}(x)$ est nulle le long de la droite $x_2 = d$ où d est défini par :

$$P_{\lambda}^{+}(x_1, d) = \int_{s_2 > 0} \varphi_{\lambda}(s_1 - x_1, s_2 - d) ds_1 ds_2 = \frac{2}{3}. \quad (16)$$

Dans le cas d'une gaussienne de covariance $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ la valeur de d est 0.43σ

Le champ $f * \varphi_{\lambda}(x)$ possède donc comme trajectoire la droite $x_2 = d$, parcourue à la vitesse $1, 1 = (2/3)1 + (1/3)1, 3$. Dans tous les cas, lorsque λ tend vers 0 cette trajectoire tend vers l'axe $x_2 = 0$ (voir Fig. 10).

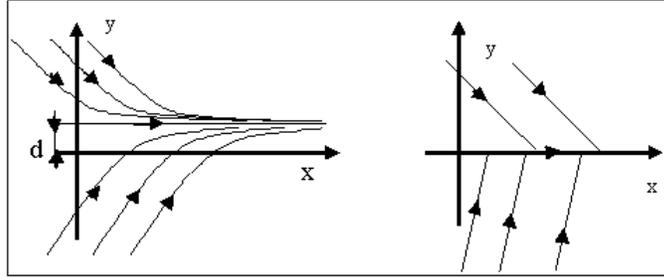


Figure 10: Solutions du champ régularisé $x' = f * \varphi_{\lambda}(x)$, où f est le champ discontinu de l'Exemple 10 (à gauche), et Φ -solutions de f (à droite).

Proposition 5 Soit O un ouvert sur lequel le champ f est convergent vers S . Alors les Φ -solutions de f issues d'un point de S sont des courbes intégrales du champ f^g tangent à S appartenant à l'enveloppe convexe de $f^+(x)$ et $f^-(x)$, précisément :

$$f^g(x) = \alpha f^+(x) + (1 - \alpha) f^-(x),$$

où le paramètre α est déterminé par l'équation $\langle f^g(x), \text{grad}g(x) \rangle = 0$.

Démonstration : On imite ce qui vient d'être fait sur l'exemple ci-dessus. On note

$$S_{\lambda} = \{x : \langle f * \varphi_{\lambda}(x), \text{grad}g(x) \rangle = 0\}.$$

Il faut vérifier que S_λ est une courbe qui tend vers S . Comme les trajectoires de $f * \varphi_\lambda$ issues d'un point de S_λ restent dans S_λ par construction, leurs limites sont des trajectoires de S solution de f^g . Ce qui achève la démonstration.

Il est remarquable que la vitesse le long de S soit déterminée de façon unique, indépendamment de la famille Φ . On verra plus loin que ce n'est pas toujours le cas lorsque la discontinuité est de co-dimension plus grande que 1. Donc, dans le cas convergent, pour toute famille Φ , une unique Φ -solution est issue de tout point, c'est la solution de Filippov. Nous regardons maintenant ce que donne l'intégration du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ f .

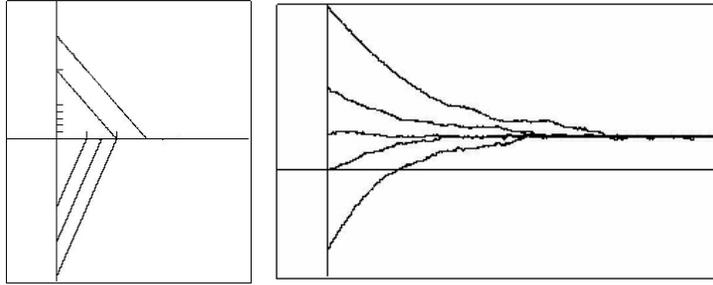


Figure 11: Solutions du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ discontinu f de l'Exemple 10 correspondant à une gaussienne φ_λ d'écart type 0.01 (à gauche). A une échelle beaucoup plus fine (à droite) on constate que les solutions sont à une distance de l'ordre de 0.0043 de l'axe $x_2 = 0$.

Dans l'expérience représentée dans la Fig. 11, nous avons simulé, pour la fonction f de l'Exemple 10 ci-dessus avec pour fonction φ_λ une gaussienne d'écart type 0,01. Sur l'écran, à cette échelle, les trajectoires semblent déterministes. Elles partent de l'axe vertical et rejoignent l'axe horizontal qu'elles suivent ensuite à une distance invisible à cette échelle. Avec les mêmes données (voir Fig. 11 à droite), nous regardons le processus à une échelle beaucoup plus fine. On observe bien que les trajectoires sont celles d'un processus aléatoire (elles sont tremblées) et qu'elles sont décollées d'environ 0.43 fois l'écart type ce qui correspond à la valeur prévue.

5.3 Champ divergent de la courbe de discontinuité

Nous supposons que dans un ouvert O nous avons pour tout point x de S :

$$\langle f^-(x), \text{grad}g(x) \rangle < 0, \text{ et } \langle f^+(x), \text{grad}g(x) \rangle > 0$$

Nous disons que le champ est divergent de S .

Exemple 11 Nous considérons le champ f de \mathbb{R}^2 défini par :

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ 1.3 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ -2 & \text{si } x_2 < 0. \end{cases}$$

Le champ est indéterminé si $x_2 = 0$. Comme dans le cas convergent nous déduisons que la seconde composante du champ $f * \varphi_\lambda(x)$ est nulle le long de la droite $x_2 = d$ où d est défini par l'équation (16). Le champ $f * \varphi_\lambda(x)$ possède donc comme trajectoire la droite $x_2 = d$ parcourue à la vitesse 1. Dans tous les cas, lorsque λ tend vers 0 cette trajectoire tend vers l'axe $x_2 = 0$ (voir Fig. 12).

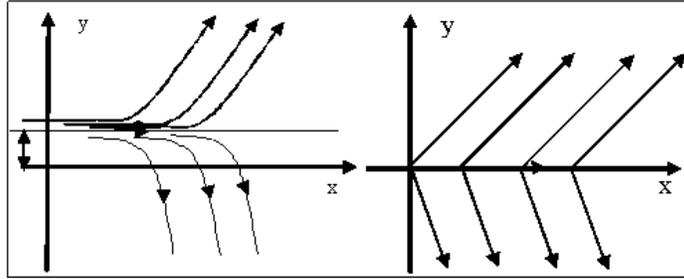


Figure 12: Solutions du champ régularisé $x' = f * \varphi_\lambda(x)$, où f est le champ discontinu de l'Exemple 11 (à gauche), et Φ -solutions de f (à droite).

Proposition 6 Soit O un ouvert sur lequel le champ est divergent de S . Alors les Φ -solutions de f issues d'un point de S sont des courbes intégrales du champ f^g tangent à S appartenant à l'enveloppe convexe de $f^+(x)$ et $f^-(x)$, précisément :

$$f^g(x) = \alpha f^+(x) + (1 - \alpha) f^-(x),$$

où le paramètre α est déterminé par l'équation $\langle f^g(x), \text{grad}g(x) \rangle = 0$, ainsi que toutes les trajectoires qui après avoir suivi le champ ci-dessus pendant un certain temps le quittent pour suivre une trajectoire de f .

Démonstration : Il nous suffit de regarder ce qui se passe sur l'exemple. La trajectoire portée par la droite $x_2 = d$ converge vers la trajectoire portée par l'axe $x_2 = 0$. Si nous prenons pour conditions initiales les points $(x_{1n}, x_{2n}) = (0, d \pm e_n)$, en faisant tendre e_n vers 0 plus ou moins vite nous obtiendrons des limites qui longent plus ou moins longtemps la courbe S et quittent vers le haut ou vers le bas.

Nous allons maintenant regarder comment se comporte le $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ f . Nous le faisons sur le champ :

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ 1 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ -2 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad (17)$$

dont la composante horizontale est continue (le champ est indéterminé si $x_2 = 0$). Ceci justifie que nous prenions comme bruit uniquement un bruit à une dimension le long de la composante verticale (ce qui diminue la durée des simulations !). En principe, pour un λ non nul, les trajectoires du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique issues d'un point, convergent en probabilité sur tout intervalle de temps borné, vers la trajectoire de l'équation régularisée.

En particulier il est intéressant d'observer, dans le cas d'un bruit gaussien, comment se fait cette convergence vers la trajectoire instable :

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = 0.43\lambda$$

où λ est l'écart type du processus. Dans la Fig. 13 nous présentons le résultat d'une

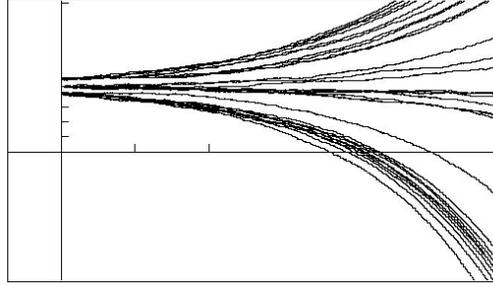


Figure 13: Solutions du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ discontinu (17) correspondant à une gaussienne φ_λ d'écart type 1. Les solutions sont à une distance de l'ordre de 0.437 de l'axe $x_2 = 0$

expérimentation. Les simulations ont été faites avec un pas de 0.0001. Pour trois conditions initiales différentes, nous faisons 10 expériences. La valeur 0.437 observée semble être un peu forte pour la valeur de la solution instable (théoriquement 0.432..). Il est possible que la faible qualité de la réalisation de notre suite de variables aléatoires soit à l'origine de cette différence. La dissymétrie entre les trajectoires qui montent et celles qui descendent s'explique simplement par la dissymétrie du champ.

Nous allons maintenant observer un phénomène à première vue paradoxal. Le bruit peut stabiliser des trajectoires instables. Prenons le champ discontinu symétrique (le champ est indéterminé si $x_2 = 0$) :

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ 1 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 > 0, \\ -1 & \text{si } x_2 < 0, \end{cases} \quad (18)$$

Pour ce champ, l'axe horizontal est instable. L'idée commune est qu'en présence de bruit, il sera très difficile de suivre cette trajectoire, d'autant plus que le bruit sera plus

fort. Ce n'est pas si simple et il faut préciser ce qui est entendu par bruit. Nous avons le *bruit sur l'observation* du schéma d'Euler stochastique déjà introduit :

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_{t+(k+1)h} = \xi_{t+kh} + hf(\xi_{t+kh} + V_{t+kh})$$

qui agit sur l'argument de la fonction f qu'il faut distinguer d'un *bruit additif sur l'état* qui agit à l'extérieur de l'argument de la fonction.

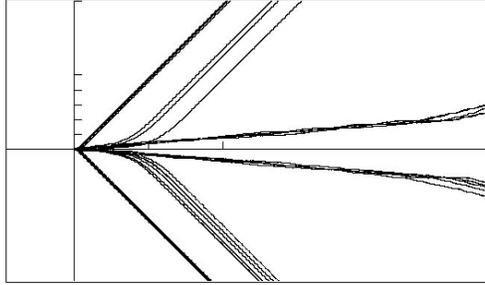


Figure 14: Solutions du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ discontinu (18). Celles qui quittent l'axe $x_2 = 0$ tout de suite correspondent à $\lambda = 0.01$, celle qui en restent proches correspondent à $\lambda = 1$. Les solutions intermédiaires correspondent à $\lambda = 0.1$.

D'après la Proposition 3 le processus correspondant à la présence d'un bruit sur l'observation converge vers le champ régularisé $f * \varphi_\lambda$ qui sera d'autant plus régulier (moins instable) en 0 que λ sera grand, c'est-à-dire le bruit sera grand. Donc, partant de 0, nous nous attendons à rester près de 0 d'autant plus longtemps que l'écart type sera grand. Sur la Fig. 14 nous montrons le résultat de simulations avec le champ divergent (18). On voit que pour un grand écart type les trajectoires "décollent" plus lentement de l'axe.

6 Discontinuité le long d'une courbe dans \mathbb{R}^3

Il est manifeste que dans le cas de discontinuités le long d'une courbe de \mathbb{R}^2 ce qui compte ce n'est pas sa dimension (égale à 1) de la courbe, mais sa codimension qui vaut également 1. Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que ce que nous avons mis en évidence dans le paragraphe précédent, notamment l'unicité de la solution, est valable sur toute surface de discontinuité convergente de co-dimension 1 de \mathbb{R}^n . Ce nouveau paragraphe est consacré à la codimension deux.

Revenons au concept de solution de Filippov. Soit une sous variété S de le long de laquelle le champ est discontinu. Le long de S les solutions de Filippov vont suivre

un champ de vecteur à la fois tangent à S et appartenant à l'enveloppe convexe $\Gamma(x)$ déterminée suivant la procédure définie dans la Section 2. Quand S est de codimension 1 le convexe est déterminé par les deux valeurs prises de chaque côté de S , il est donc de dimension 1. La solution est unique. Si la codimension est plus grande le convexe $\Gamma(x)$ peut être de dimension plus grande que 2 et la solution n'a pas de raison d'être unique. Voyons un exemple.

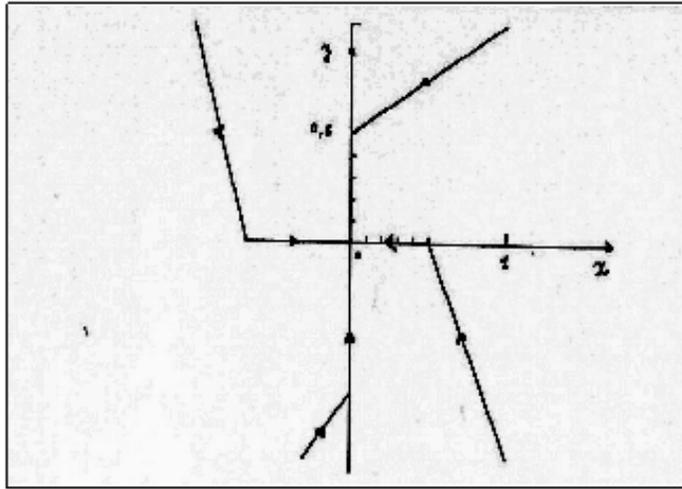


Figure 15: Solutions du champ $f * \varphi_\lambda$ correspondant au champ discontinu (19) et à une loi normale isotrope d'écart type 0.01.

Exemple 12 Nous considérons le champ de vecteur de \mathbb{R}^3 défini par les expressions ci-dessous :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f^1 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0, \\ f^2 & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 < 0, \\ f^3 & \text{si } x_1 < 0 \text{ et } x_2 < 0, \\ f^4 & \text{si } x_1 < 0 \text{ et } x_2 > 0, \end{cases} \quad (19)$$

avec

$$f^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce champ présente la particularité d'être discontinu le long de l'axe vertical $x_1 = x_2 = 0$. L'étude de ce champ se résume à celle du champ (f_1, f_2) dans le plan (x_1, x_2) . Une fois le portrait de phase établi dans ce plan, il suffit de considérer la

composante verticale. Comme les discontinuités n'existent que pour les variables x_1 , x_2 nous ne régularisons qu'en utilisant une mesure portée par le plan (x_1, x_2) . Dans les exemples, nous prendrons une loi normale.

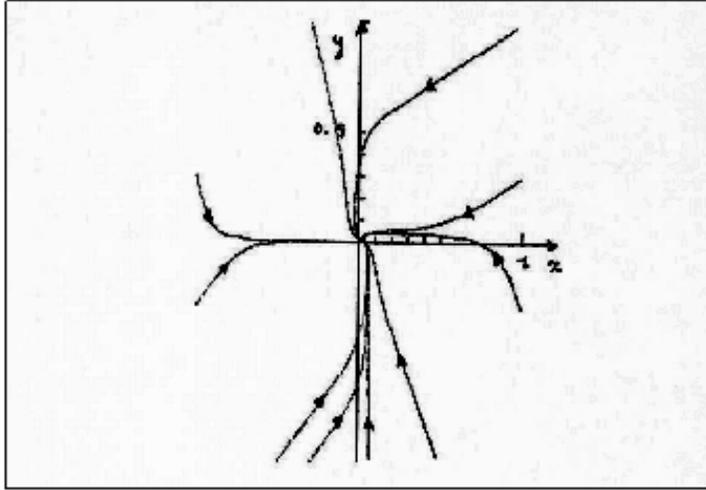


Figure 16: Solutions du champ $f * \varphi_\lambda$ correspondant au champ discontinu (19) et à une loi normale isotrope d'écart type 0.1.

Le champ présente en dehors de $(0, 0)$ des discontinuités convergentes, du type de celle étudiée précédemment. Analysons ce qui se passe à l'origine. Notons :

$$P_\lambda^1(x_1, x_2) = \int_{s_1 > 0, s_2 > 0} \varphi_\lambda(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2,$$

$$P_\lambda^2(x_1, x_2) = \int_{s_1 > 0, s_2 < 0} \varphi_\lambda(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2,$$

$$P_\lambda^3(x_1, x_2) = \int_{s_1 < 0, s_2 < 0} \varphi_\lambda(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2,$$

$$P_\lambda^4(x_1, x_2) = \int_{s_1 < 0, s_2 > 0} \varphi_\lambda(s_1 - x_1, s_2 - x_2) ds_1 ds_2.$$

Avec ces notations, nous avons :

$$f * \varphi_\lambda = P_\lambda^1 f^1 + P_\lambda^2 f^2 + P_\lambda^3 f^3 + P_\lambda^4 f^4,$$

ou encore, puisque la somme des 4 probabilités est égale à 1 :

$$f * \varphi_\lambda = P_\lambda^1 (f^1 - f^4) + P_\lambda^2 (f^2 - f^4) + P_\lambda^3 (f^3 - f^4) + f^4.$$

L'annulation des deux premières composantes de ce champ impose deux équations pour trois inconnues, donc à $P_\lambda^1, P_\lambda^2, P_\lambda^3$ d'appartenir à un segment dans un espace à trois dimensions. Comme ces dernières quantités dépendent de deux variables nous avons, en général, une valeur (x_1^*, x_2^*) , proche de $(0, 0)$ (si λ est petit) pour laquelle les deux premières composantes du champ $f * \varphi_\lambda$ sont nulles. D'autre part, le long des axes, l'analyse du paragraphe précédent montre que la dynamique est dirigée vers l'origine. Nous en déduisons que, pour λ assez petit, la projection de $f * \varphi_\lambda$ sur le plan horizontal présente un nud près de l'origine. Sur la Fig. 15 nous montrons le portrait de phase, sur le carré unité, pour une loi normale, centrée, isotrope d'écart type 0.01. A cette échelle on ne voit pas que les trajectoires sont légèrement décollées le long des axes. A la même échelle, mais avec un écart type de 0.1 on voit (Fig. 16) les trajectoires se décoller approximativement de la distance prévue au paragraphe 5.

Sur la Fig. 17, nous représentons le schéma d'Euler stochastique associé au champ (19) pour la loi normale isotrope d'écart type 0.01. Nous changeons l'échelle d'observation. Les trajectoires sont décollées à approximativement la distance prévue et sont légèrement tremblées.

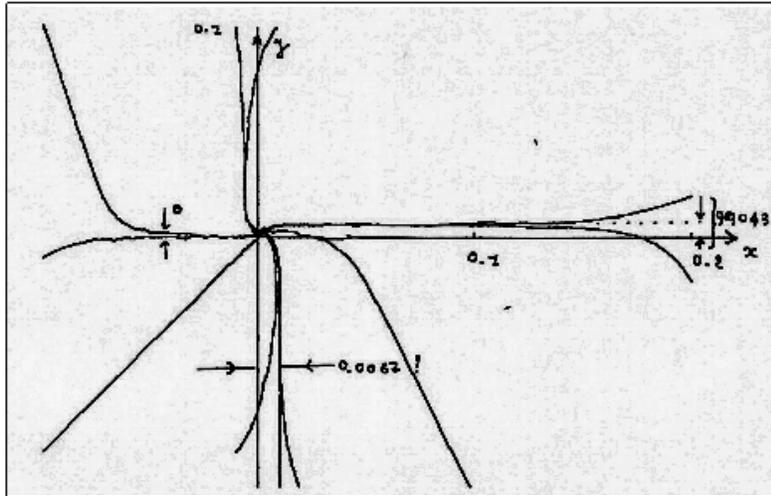


Figure 17: Solutions du $(\varphi_\lambda, f, x_0, h)$ schéma d'Euler stochastique associé au champ discontinu (19) correspondant à une loi normale isotrope d'écart type 0.01.

Sur la Fig. 18, toujours pour la loi normale isotrope d'écart type 0.01, nous

représentons trois trajectoires différentes dans le plan et nous reprenons ces trajectoires, cette fois ci en représentant la troisième composante en fonction du temps. La

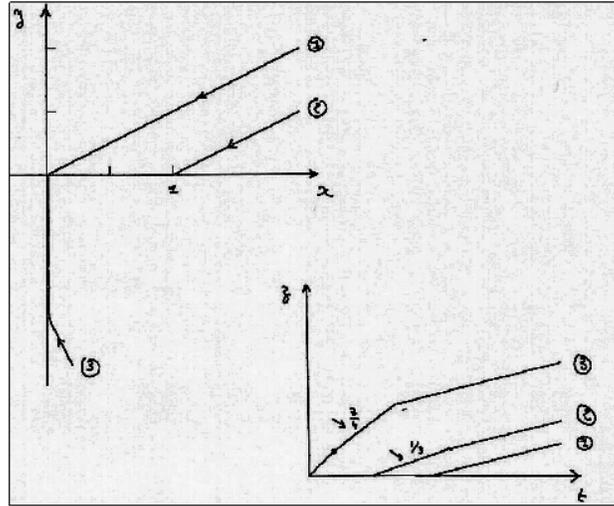


Figure 18: Projections horizontales et croissance verticale de trois trajectoires du champ $f * \varphi_\lambda$ associé au champ discontinu (19).

trajectoire no. 3 commence par traverser une partie de l'unique quadrant où la vitesse verticale du champ est non nulle et égale à un, la vitesse verticale sur cette portion est égale à 1. Ensuite nous longeons sur sa droite la partie négative de l'axe x_2 et la nouvelle vitesse verticale est une moyenne entre 1 et 0 définie par les composantes horizontales du champ. Enfin, quand la trajectoire arrive en 0 sa vitesse verticale est une moyenne portant sur un voisinage de l'origine. Comme la vitesse verticale est nulle sur trois des quatre quadrants la moyenne est plus faible encore. On observe donc deux "cassures" successives de la croissance verticale de la trajectoire no. 3. Pour les mêmes raisons nous observons deux cassures successives pour la croissance verticale de la trajectoire 2. La trajectoire 1 qui pénètre directement dans un voisinage de l'origine ne possède qu'une seule cassure dans sa croissance verticale. On observe bien que les vitesses verticales, dans la phase finale qui correspond à la présence au voisinage de l'origine, sont identiques pour les trois trajectoires. A l'origine la vitesse verticale et donnée en faisant la somme pondérée

$$f * \varphi_\lambda(x_1^*, x_2^*, x_3) = P_\lambda^1(x_1^*, x_2^*)f^1 + P_\lambda^2(x_1^*, x_2^*)f^2 + P_\lambda^3(x_1^*, x_2^*)f^3 + P_\lambda^4(x_1^*, x_2^*)f^4,$$

où (x_1^*, x_2^*) sont déterminés par le système de 2 équations :

$$\begin{aligned} -2P_\lambda^1(x_1^*, x_2^*) - P_\lambda^2(x_1^*, x_2^*) + 3P_\lambda^3(x_1^*, x_2^*) + P_\lambda^4(x_1^*, x_2^*) &= 0, \\ -P_\lambda^1(x_1^*, x_2^*) + 2P_\lambda^2(x_1^*, x_2^*) + 3P_\lambda^3(x_1^*, x_2^*) - 3P_\lambda^4(x_1^*, x_2^*) &= 0. \end{aligned}$$

Ceci donne, dans notre cas :

$$f * \varphi_\lambda(x_1^*, x_2^*, x_3) = P_\lambda^2(x_1^*, x_2^*) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, si nous changeons de loi de probabilité, comme nous allons le faire, nous pourrions obtenir des vitesses verticales différentes. Dans les simulations représentées dans

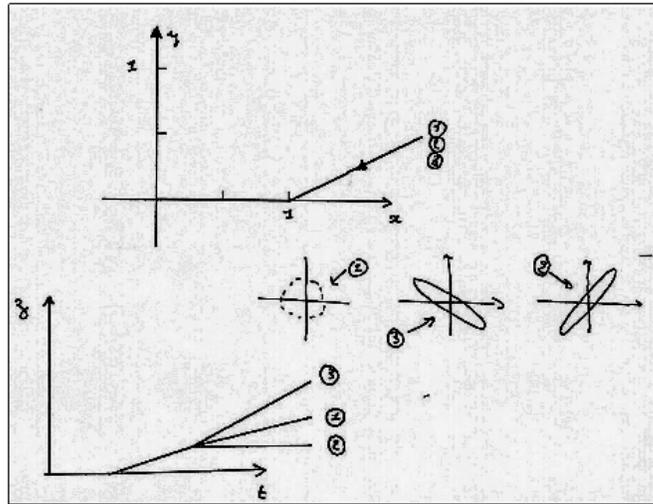


Figure 19: Trois gaussiennes régularisantes non isotropes pour une même condition initiale du champ $f * \varphi_\lambda$ associé au champ discontinu (19).

la Fig. 19 nous avons considéré trois gaussiennes différentes. La no.1 est isotrope, la no.2 est anisotrope, sa masse étant répartie le long de la première bissectrice, la no. 3 est également anisotrope et a sa masse répartie le long de la seconde bissectrice. Nous avons simulé pour chacune de ces lois la trajectoire issue d'un même point. Ces trois trajectoires sont, comme prévu, confondues en projection horizontale. Toujours comme prévu, les troisièmes composantes sont confondues tant que la projection horizontale de la trajectoire n'atteint pas un voisinage de 0. A partir de là elles diffèrent. La trajectoire no. 1 prend une pente d'environ 1/4 (la loi isotrope donne une probabilité d'environ 1/4 au seul quadrant où la composante verticale du champ discontinu

est non nulle), la trajectoire no.2 a une pente quasiment nulle car la loi no.2 ne charge pratiquement pas le quadrant ou la composante verticale est non nulle et enfin, pour la raison symétrique, la loi no.3 donne presque la probabilité $1/2$ à ce quadrant, et donc la pente finale de la trajectoire no.3 est proche de $1/2$.

7 Quelques commentaires bibliographiques

C'est Hermes [9] qui a posé le problème des perturbations sur une réaction discontinue et a proposé d'appliquer les solutions de Filippov. Brunovsky a mis en avant que dans la synthèse d'un contrôle optimal les solutions de Filippov pouvaient ne pas donner le résultat attendu par la synthèse "naïve". Il a entrepris un travail de classification des problèmes de contrôle optimal pour lesquels les synthèses intégrées au sens de Filippov donnent des trajectoires optimales. Nous ne connaissons pas d'antécédent à Filippov [9]. Il semble que ce soit R. Sentis [13] qui ait introduit les schémas d'Euler perturbés par des suites déterministes. Nous ne connaissons pas d'antécédent à l'idée de régularisation par convolution, ce qui est étonnant tant l'idée est simple et classique en analyse. Probablement existe-t-elle quelque part mais nous ignorons où. Des articles plus récents [2, 11, 12, 14] abordent la question du bruit dans les équations à second membre discontinu, mais nous n'y avons pas trouvé clairement notre proposition 4.5. Cette dernière est considérée comme élémentaire par les spécialistes des processus stochastiques [5], mais ne semble figurer explicitement nulle part car ces derniers n'ont pas de raison de travailler avec des seconds membres discontinus. Nous l'avons exposée pour la première fois lors des journées de la société mathématique sénégalaise en janvier 2001 à Dakar. On trouvera des réflexions sur la modélisation dans [10] où l'on utilise l'Analyse Non Standard qui donne des formulations équivalentes mais plus élégantes. Le prix à payer est un petit investissement dans les méthodes de l'ANS.

References

- [1] **Andronov A.A., Vitt A.A., et Chaikin**, *Vibration theory*. Fizmatgiz, Moscow, 1959.
- [2] **Asarin E. A et R. N. Izmailov**, *Determining the sliding speed on a discontinuity surface*, *Automatika i Telemekhanika*, No. 9, pp 43-48, Septembre 1989.
- [3] **Aubin J-P. et Cellina A.**, *Differential inclusions*, Springer-Verlag Grundlehren der math. Wiss (1984).
- [4] **Aubin J-P.**, *Viability Theory*, Birkhauser (1991).
- [5] **Benaim M.**, *Dynamics of stochastic approximation algorithms*. Notes de cours écrites pour le DEA de l'Ecole Normale de Cachan, année 1996-97.

- [6] **Boltyanskii V.G.**, *Sufficient conditions for Optimality and the justification of the Dynamic Programming method*, SIAM J. Control, Vol 4. 1966 pp. 326-361.
- [7] **Brunovsky P.**, *The closed-loop time optimal control. I : Optimality*, SIAM J. Control, Vol 12. No 4, 1974 pp. 624-63.
- [8] **Filippov A. F.**, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Mat. Sb., 51 (1960) pp. 99-128.
- [9] **Hermes H.**, *Discontinuous Vector Fields and Feedback Control*, in “Differential Equations and Dynamical systems”, J. Halle and J. LaSalle Eds. Academic Press, New York, 1967, pp. 155-168.
- [10] **Lobry C.**, *Traces macroscopiques de marches de pas infiniment petit*, dans le “Le labyrinthe du continu”, J.M. Salanskis et H. Sinaceur eds. pp436-445 Springer Verlag (1992).
- [11] **Milstein G.S. and A. Yu. Veretennikov**, *On deterministic Stochastic Sliding Modes via Small Diffusion*, Markov Processes Relat. Fields 6, 371-396 (2000)
- [12] **Prieur C.**, *Uniting Local and Global Controllers with Robustness to Vanishing Noise*, Math. Control Signals Systems , 14 : 143-172 (2001).
- [13] **Sentis R.**, *Equations différentielles à second membre mesurable*, Bollettino U.M.I. (5) 15-B (1978), 724-742.
- [14] **Utkin V.I. and S.V. Drakunov**, *Stochastic regularization of systems with discontinuous controls*, Sov. Phys. Dokl. 28, No. 10 (1983), 335-337.

C. L.
INRIA Sophia Antipolis,
2004, route des Lucioles, B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
Claude.Lobry@inria.fr

T. S.
Laboratoire de Mathématiques,
4 rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse
Tewfik.Sari@uha.fr