PETITE HISTOIRE DE LA STROBOSCOPIE

T. Sari

Université de Mulhouse

Avril 1995

A la memoire de Jean Louis Callot et Georges Reeb

Cette petite histoire est pour moi, qui fus un témoin direct de la naissance de la stroboscopie, puis un acteur de son développement, l'occasion d'évoquer un aspect des personalités et de l'oeuvre scientifique de Jean Louis Callot et de Georges Reeb. Je donne aussi une bibliographie, je l'espère exhaustive, des travaux ayant utilisé la méthode de stroboscopie.

Au début de l'année 1977, Robert Lutz a proposé l'étude de l'équation $x' = \sin(\omega x t)$ avec ω infiniment grand. Comme la dérivée est limitée, une solution $x(t)$ de cette équation est une fonction S-continue, dont l'ombre $\phi(t)$ est une fonction standard continue. Par ailleurs, comme la dérivée $x'(t)$ oscille très vite entre -1 et 1 on peut s'attendre à ce que la fonction $\phi(t)$ ne soit pas dérivable[1] . Le problème est arrivé jusqu'à Oran où Francine et Marc Diener ainsi que Jean Louis Callot étaient coopérants. Très vite Jean Louis a donné la réponse. Dans le quadrant $t \geq 0$ et $x \geq 0$, auquel on peut limiter l'étude pour des raisons de symétrie, l'ombre $\phi(t)$ est une fonction décroissante, analytique sauf au point ou elle traverse la bissectrice $x = t$ où elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$. L'argument de Jean Louis était simple et astucieux à la fois : dans le secteur $t \geq x > 0$ il y a des pièges à trajectoires, de sorte que les solutions admettent pour ombres des hyperboles $tx =$ constante. Dans le secteur $x > t > 0$, la solution $x(t)$ oscille et deux maxima successifs (t_n, x_n) et (t_{n+1}, x_{n+1}) vérifient que

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \simeq g(t_n, x_n) \tag{1}$$

où g est une fonction standard continue.

Je situe cette réponse au printemps 1977. Je me souviens précisemment qu'à des journées sur les systèmes dynamiques à Dijon, en mai 1977, Jean Louis m'a

[1]En 1976–77 les mardis trajectoriens étaient consacrés à des leçons d'Analyse non Standard par le Maître Georges Reeb et ses disciples Robert Lutz et Michel Goze. Robert m'a raconté que c'est après l'une de ces leçons, en marchant avec Reeb vers le boulevard Gambetta, qu'il avait eu cette idée, et que Reeb a pensé que ce phénomène de crépitement méritait d'être regardé de près. Un regret : le crépitement, dont Reeb a si souvent parlé, n'a pas sucité chez les nonstandardistes tout l'intérêt qu'il mérite, mis à part une étude de Albert Troesch et Emile Urlacher. Il est probable qu'une étude plus approfondie de ce phénomène puisse révéler des fonctions continues et nulle part dérivables...

demandé de calculer pour lui[2] l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{x+t\sin\theta}$ et m'a explique qu'il en avait besoin pour expliciter la fonction g. On trouve d'ailleurs

$$g(t,x) = \frac{\sqrt{x^2-t^2}-x}{t}.$$

C'est Reeb qui a tout de suite remarqué que la condition (1) signifiait que la suite de points (t_n, x_n) s'obtient par le schéma d'Euler (perturbé et à pas variables) appliqué à l'équation différentielle standard $x' = g(t,x)$. Donc $\phi(t)$ est une solution standard de cette équation. La méthode de stroboscopie était née. Reeb a été très enthousiasmé par cette méthode et l'a présentée au IV International Colloquium on Differential Geometry qui s'est tenu à Santiago de Compostella en 1978.

Je ne sais pas qui de Callot ou de Reeb a proposé le mot stroboscopie, mais je le trouve très pertinent et rendant parfaitement compte de la méthode. "L'idée de base est simple. On considère une équation différentielle standard $x' = X(x)$. On étudie une fonction f [très sauvage]. On suppose que f se laisse surprendre (c'est l'effet stroboscopique) en des instants discrets infiniment proches, mais éventuellement très *irrégulièrement* espacés de sorte que la pente $\frac{f(t_{i+1})-f(t_i)}{t_{i+1}-t_i}$ entre deux flashs soit infiniment proche de $X(f(t_i))$. Dans ces conditions $f(t)$ est infiniment proche d'une solution de l'équation $x' = X(x)$." Ces mots sont de Reeb. Dans les années 1978–1980 Jean Louis Callot a donné d'autres applications de la stroboscopie, en particulier pour le calcul du nombre de tours et la localisation des canards oscillants. Ces résultats ont fait l'objet de sa thèse soutenue en juin 1981 à Strasbourg.

C'est au printemps 1980 que j'ai commencé à m'intéresser activement aux applications de l'ANS dans les équations différentielles[3]. En mars 1980, je suis parti à Amsterdam pour rencontrer le Professeur W. T. van Est et discuter des résultats sur les variétés de contact affines que j'avais obtenu dans ma thèse de 3^o Cycle. J'ai rencontré alors à Amsterdam le très enthousiaste E. M. de Jager et je suis revenu avec de très nombreux problèmes (à transmettre à Lutz) dont le problème aux limites

$$\varepsilon^2 x'' + f(t,x) = 0 \qquad x(0) = a \quad x(1) = b \tag{2}$$

Très vite avec Robert, nous avons compris les conditions (qualifiées de 'mystérieuses' par les asymptoticiens classiques) qui assurent l'existence de solutions présentant

[2]Autant Jean Louis excellait dans l'art de conduire les calculs 'qualitatifs' les plus compliqués et savait en tirer les conclusions les plus fines, autant il avait horreur du moindre calcul explicite. Je ne sais pas si ceux qui l'ont connu plus tôt ont observé cela aussi chez le Jean Louis étudiant.

[3]Pourtant, j'ai été présent moi même à Strasbourg dès septembre 1976. J'avais assisté pendant toute l'année 1976–77 aux leçons des mardis trajectoriens consacrées à l'analyse non standard. Je suivais jour après jour l'écriture du Lutz-Goze. J'ai suivi en 1978–79 un cours de DEA fait par Reeb et je me suis intéréssé de très près pendant ces trois années à l'explosion de résultats obtenus par les pionniers alsaciens du non standard. J'ai eu le bonheur aussi, pendant sept années en Alsace, de répondre plusieurs fois par jours au 'quoi de neuf' légendaire de Reeb. Cette longue période d'apprentissage a contribué certainement pour beaucoup dans le caractère parfaitement naturel que je trouve à l'analyse non standard aujourd'hui.

des couches limites en 0 ou en 1 ou bien une couche libre à l'intérieur de $]0,1[$. Notre étude basée sur l'étude du système

$$\varepsilon x' = y \qquad \varepsilon y' = -f(t,x) \tag{3}$$

associé à l'équation du second ordre (2) a mis en évidence la 'presque-intégrale première' $H(t,x,y) = F(t,x) + y^2/2$ où $F(t,x) = \int f(t,x)dx$ est une primitive de f en x. Les solutions qui intéressent les asymptoticiens sont des solutions qui se trouvent dans le halo des surfaces critiques d'équation $H(t,x,y) = H(t,c(t),0)$ où $(t,c(t),0)$ est une 'ligne de cols' du champ (3). Les propriétés mystérieuses mentionnées ci dessus étaient des propriétés sur la géométrie de ces surfaces. Notre étude faisait apparaitre aussi des solutions rapidement oscillantes autour des 'lignes de centres' du champ (3) et dont l'existence n'avait jamais été soupsonnée auparavant. On ne savait pas comment évoluait l'amplitude de ces solutions oscillantes ou de façon équivalente comment évoluait la 'fonction énergie' $E(t) = H(t,x(t),y(t))$. Comme la fonction $E(t)$ est lentement variable, bien que $x(t)$ et $y(t)$ oscillent très vite, on devait pouvoir étudier $E(t)$ par stroboscopie. La réponse est simple. Dans un bassin d'oscillation, l'équation $H(t,x,y) = E$ définit une courbe fermée qui rencontre l'axe des x aux points $x_1(t,E)$ et $x_2(t,E)$ qui sont racines de l'équation $F(t,x) = E$. Si on note par $E_n = E(t_n)$ la valeur de l'énergie de chaque oscillation alors on obtient

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{t_{n+1} - t_n} \simeq G(t_n, E_n)$$

où $G(t,E)$ est la fonction standard définie dans le bassin d'oscillation considéré par

$$G(t,E) = \int_{x_1(t,E)}^{x_2(t,E)} \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dx}{\sqrt{E - F(t,x)}} \left[\int_{x_1(t,E)}^{x_2(t,E)} \frac{dx}{\sqrt{E - F(t,x)}} \right]^{-1}.$$

Par conséquent l'énergie $E(t)$ admet pour ombre une solution standard de l'équation différentielle $E' = G(t,E)$.

Plus tard je me suis rendu compte que l'aire $\mathcal{A}(t)$ balayée par l'orbite était presque constante et j'ai compris que ce que j'avais obtenu c'était l'invariant adiabatique bien connu pour un système hamiltonien dépendant lentement du temps. Le reste est venu très vite : les systèmes hamiltoniens à paramètres lentement variables et leur perturbations, la méthode de moyennisation, la théorie KBM, la dépendance continue en fonction des paramètres des solutions d'un système différentiel ...

Mon expérience personnelle dans cette période me pousse à penser que la stroboscopie est vraiment une méthode efficace pour résoudre des problèmes. Elle a en tout cas permis au novice que j'étais de pénétrer dans un domaine de recherche très riche et très developpé par une voie tout a fait originale. Le traitement de ces questions classiques de moyennisation par la méthode de stroboscopie n'est pas une redite des travaux connus dans un langage nouveau, mais vraiment une approche différente. C'est ainsi que notre étude du problème (2) procède directement en analysant les solutions dans l'espace d'observabilité (3), et en cherchant à répondre aux questions qui s'y posent (c'est en tout cas ainsi que j'ai procédé), alors que l'approche classique (plus érudite peut être ...) consisterait à reconnaitre dans (2) un système hamiltonien dépendant lentement du temps (il suffit d'écrire l'équation à l'échelle de temps $\tau = t/\varepsilon$) puis à utiliser les théorèmes sur les invariants adiabatiques. Par exemple, pour l'oscillateur linéaire

$$\varepsilon^2 x'' + \omega^2(t)x = 0 \tag{4}$$

on obtient $G(t,E) = E\omega'(t)/\omega(t)$ de sorte que $E(t) \simeq E(0)\omega(t)/\omega(0)$, c'est à dire que le rapport $E(t)/\omega(t)$ de l'énergie à la fréquence reste presque constant. Ce résultat est obtenu classiquement en notant que la variable d'action $I = \mathcal{A}/2\pi$ où $\mathcal{A} = \pi ab$ est l'aire balayée par l'ellipse $\omega^2x^2 + y^2 = 2E$ de demi axes $a = \sqrt{2E}/\omega$ et $b = \sqrt{2E}$ est un invariant adiabatique : on trouve $I = E/\omega$ en remplaçant a et b par leurs valeurs. Dans l'exemple de l'oscillateur linéaire, l'invariance adiabatique de l'action est obtenue en écrivant l'équation (4) dans les coordonnées action-angles définies par :

$$I = \frac{E}{\omega} \qquad \theta = \frac{y}{\omega x}.$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= I\frac{\omega'}{\omega}\cos 2\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\omega}{\varepsilon} - \frac{\omega'}{2\omega}\sin 2\theta \end{aligned}$$

qui est type (7) ci dessous : le théorème classique de moyennisation s'applique et montre que I reste presque constant. Notons que c'est le seul cas où les variables action-angles sont calculables explicitement. Par ailleurs l'étude des systèmes hamiltoniens à paramètres lentement variables et de leurs perturbations non hamiltoniennes du type

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x,y,\lambda) + \varepsilon f(x,y,\lambda) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,\lambda) + \varepsilon g(x,y,\lambda) \\ \frac{d\lambda}{d\tau} &= \varepsilon\Omega(x,y,\lambda) \end{aligned} \tag{5}$$

peut être menée exactement de la même manière que l'étude de (2). On est conduit à un système standard

$$\frac{dE}{dt} = G(E,\lambda) \qquad \frac{d\lambda}{dt} = K(E,\lambda)$$

régissant l'évolution de $E(t) = H(x(t), y(t), \lambda(t))$ et de $\lambda(t)$. La méthode employée est nouvelle, sa signification géométrique est claire et elle semble plus efficace que la classique réduction aux variables action-angles[4].

[4] Qui n'a d'ailleurs pas été employée à ma connaissance pour étudier un système du type (5).

C'est E. de Jager qui nous a parlé du théorème KBM lors d'une visite mémorable à Mulhouse au printemps 1981. Le problème fondamental est l'approximation des solutions du système

$$x' = \varepsilon F(\tau, x) \tag{6}$$

par les solutions du système moyennisé $x' = \varepsilon f(x)$ où

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T F(\tau, x) d\tau$$

est la moyenne de F par rapport au temps. J'ai appliqué dans ce problème la technique de stroboscopie et j'ai été vraiment émerveillé par l'effort très modéré exigé par la démonstration dans le cas périodique, puis de son extension au cas presque périodique[5]. Le cas général a été un peu plus coriace : il ne suffisait pas, comme je m'y étais habitué dans presque toutes les autres applications, de se laisser guider par les calculs. Il a fallu trouver une astuce de plus (c'est à dire trouver la bonne échelle à laquelle regarder l'équation pour choisir l'instant d'observation t_{n+1} à partir de t_n), mais la technique de stroboscopie était toujours là, dans toute sa simplicité. Ce théorème KBM dans le cas presque périodique, puis dans le cas général a été pour moi la motivation d'étendre la technique de stroboscopie à des situations où la sélection de tous les instants d'observation n'est pas donnée a priori, ou bien par une relation de récurrence donnant t_{n+1} en fonction de t_n, comme cela était le cas dans les applications antérieures.

J'ai présenté ces résultats en mai 1982 à la III^e Rencontre de Géométrie du Schnepfenried qui s'est tenue en l'honneur de Georges Reeb. Au cours de mon exposé, ayant annoncé que j'allais utiliser la stroboscopie de Callot, j'ai entendu Reeb dire “et de son rédacteur Reeb”. N'ayant pas bien compris son commentaire, j'ai marqué un temps d'arrêt et je l'ai regardé. Il a répété alors : “La stroboscopie de Callot et de son rédacteur Reeb”. Il s'agissait probablement d'une coquetterie de sa part car nous sommes unanimes à témoigner que jamais Reeb n'a cherché a revendiquer la paternité d'une quelconque idée dans l'asymptotique non standard même lorsqu'il a été très directement impliqué. Cependant, je reste convaincu que sans la perspicacité de Reeb, ce qui est devenu aujourd'hui un véritable outil de l'asymptotique non standard, ne serait resté qu'un simple calcul, sur quelques exemples particuliers, où un esprit bienveillant accepterait tout juste de reconnaitre la convergence du schéma d'Euler. C'est la raison pour laquelle il me plait aujourd'hui de parler de la stroboscopie de Callot–Reeb et je vous invite à en faire autant.

Une autre anecdote me vient à l'esprit au sujet de Reeb et de la stroboscopie. En 1991 j'ai retrouvé les notes du cours de DEA que Reeb nous avait fait en 1978–79. L'une des dernières leçons parlait de l'oscillateur linéaire (4) et d'une certaine ellipse qui se déformait mais dont l'aire restait presque constante : j'avais sous les yeux des invariants adiabatiques, obtenus d'ailleurs par stroboscopie, tout cela était écrit de ma propre main deux années avant que je retrouve les même résultats sur l'équation (2). Je n'en revenais pas et je me promettais d'en parler à Reeb à la première occasion et de lui demander comment, lors de nos très nombreuses discussions de

[5]Voir l'article *Stroboscopy and Averaging* dans ce volume.

1980 à 1983, sur mes résultats concernant l'application de la stroboscopie dans les problèmes de moyennisation, il ne m'avait jamais fait remarquer que l'idée première était dans son cours de DEA depuis longtemps. Sa réponse fut "ce qui compte c'est ce que les choses deviennent" (je peux avoir changé les mots, il a dit peut-être "ce qui compte c'est ce que les graines deviennent", je ne me souviens plus, je le cite de mémoire). Toute la générosité de cet homme, qui a su toujours guider les gens sans les forcer, me paraissait évidente, ce jour là plus que jamais.

Un jour (en 1980 peut être) j'ai dit à Jean Louis Callot qu'il avait été bien astucieux dans son étude de l'équation $x' = \sin(\omega t x)$ et je lui ai demandé comment il avait fait pour découvrir tout cela ? Il m'a répondu qu'il avait été probablement astucieux, mais que surtout il avait une calculette et qu'il avait le bon sens de la mettre a contribution. Il m'a fait alors toute une leçon sur l'expérimentation en mathématiques. J'ai profitté par la suite de cette leçon au moins dans deux circonstances bien précises liées à la stroboscopie. La première fois c'était lorsque j'avais mis en évidence l'équation $E' = G(t, E)$ dans le problème (2). J'ai envisagé avec Robert Lutz la possibilité que cette équation conduise à des solutions rapidement oscillantes qui confluent ou bien qui naissent des centres d'oscillations. C'est une expérimentation numérique en l'été 1981[6] sur des exemples variés qui m'a montré que les solutions $E(t)$ étaient toujours 'parallèles' ce qui m'a conduit très vite à la presque conservation de l'aire balayée et aux invariants adiabatiques. Je suis certain que j'ai gagné ainsi plusieurs semaines de recherche vaine. La deuxième fois c'était au printemps 1985. J'étais à Oran, au domicile de Rachid Bebbouchi, qui revenait d'un séjour en Alsace avec dans ses bagages un micro-ordinateur et le problème des solutions fantômes qui rendaient 'fous' les mulhousiens. Il s'agit des solutions produites par le schéma aux différences centrales

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \varepsilon \left(1 - u_n^2\right)$$

pour résoudre l'équation $u' = 1 - u^2$. J'ai proposé alors à Bebbouchi d'écrire un petit programme sur sa machine pour voir ce qui se passait. Comme les ordinateurs n'avaient ni les vitesses de calcul ni les grandes possibiltés graphiques que nous connaissons aujourd'hui, nous avons vu très nettement qu'après la phase où la solution numérique longe la vraie solution, elle s'en écarte et que les itérés u_n sont alors alternativement sur deux courbes bien distinctes. C'est cette observation qui m'a conduit à considérer les itérés d'indice pair $x_n = u_{2n}$ et les itérés d'indice impair $y_n = u_{2n+1}$. La stroboscopie montre alors que le schéma aux différences centrales donne en réalité les solutions du système augmenté

$$x' = 1 - y^2 \qquad y' = 1 - x^2.$$

[6]Il faut être conscient qu'a cette époque nous n'avions pas sur nos bureaux les outils micro-informatiques très performants d'aujourd'hui. Pour cette expérimentation, c'est l'Ecole des Macro Molécules de Strasbourg où Eric Benoît avait des copains, qui avait mis à ma disposition un calculateur HP muni d'une table traçante. Je me souviens aussi d'une visite au domicile de Jean Louis Callot à Oran en 1979 : il notait soigneusement sur du papier millimétrique les résultats obtenus avec sa calculette et il m'a longuement expliqué toutes les astuces qu'il fallait employer pour s'accomoder des capacités de mémoire et de stockage de l'information dérisoires dont il disposait. Mais d'autres sauront beaucoup mieux que moi vous parler des compétences informatiques de Jean Louis.

L'explication des fantômes en découle alors immédiatement.

Ces souvenirs que j'ai essayé de faire revivre pour vous sont jalonnés d'histoires de printemps. Je forme le voeux que ce nouveau printemps qui nous réunit aujourd'hui autour de la mémoire de Jean Louis Callot et de Georges Reeb soit une source d'inspiration féconde pour le futur. J'ai parlé de l'astuce et du bon sens de l'un, de la perspicacité et de la générosité de l'autre, mais il fallait aussi vraiment du génie pour avancer aussi vite et aussi loin que Callot et Reeb, et pour entrainer, chacun à sa manière tellement de gens dans leur sillage.

Commentaires bibliographiques

Je me propose dans ce qui suit de décrire brièvement l'ensemble des travaux qui ont utilisé la méthode de stroboscopie. Je prie les auteurs dont je n'aurais pas convenablement compris les idées de bien vouloir me le signaler et de m'en excuser.

La première application de la stroboscopie se trouve dans l'article de G. Reeb [R] où ont été présentés les résultats de J. L. Callot sur l'équation $x' = \sin(\omega x t)$. Cette méthode a été ensuite employée par J. L. Callot dans sa thèse [C1] pour déterminer le nombre de tours de certaines solutions rapidement oscillantes dans l'équation d'Airy et localiser ainsi des solutions canard.

La méthode de stroboscopie a été présentée par la suite en 1982 par J. L. Callot [CS] à un congrès à Belle Ile consacré à l'automatique. Cet article contient aussi la preuve par stroboscopie que j'avais obtenue dans la moyennisation des systèmes à une fréquence du type :

$$\begin{aligned} I' &= f(I,\theta) \\ \theta' &= \frac{\omega(I)}{\varepsilon} + g(I,\theta) \end{aligned} \tag{7}$$

avec $I \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in \mathbb{R}$, f et g 2π-périodiques en θ et ω non nulle. Les solutions $I(t)$ sont approximées pendant les temps limités par les solutions du système moyennisé $I' = F(I)$ où F est la moyenne de f sur une période :

$$F(I) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(I,\theta)d\theta.$$

J'ai par la suite généralisé cette étude [St3] à des systèmes où la fréquence ω dépend aussi de l'angle θ :

$$\begin{aligned} I' &= f(I,\theta) \\ \theta' &= \frac{\omega(I,\theta)}{\varepsilon} + g(I,\theta) \end{aligned}$$

L'équation moyennisée $F' = F(I)$ s'obtient alors en calculant la moyenne

$$F(I) = \int_0^{2\pi} \frac{f(I,\theta)}{\omega(I,\theta)}d\theta \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega(I,\theta)}\right)^{-1}.$$

J'ai considéré aussi le cas où la fréquence ω peut s'annuler. Les solutions révèlent deux comportements différents. Dans l'ouvert

$$S = \{I \in \mathbb{R}^n \ : \omega(I, \theta) \neq 0 \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}\}$$

la solution $I(t)$ est approximée par une solution de l'équation moyennisée $I' = F(I)$. Dans l'ouvert

$$P = \{I \in \mathbb{R}^n \ : \omega(I, \theta) \text{ prend des valeurs positives et negatives } \}$$

$\varepsilon\theta(t)$ reste presque constant. L'équation $x' = \sin(tx/\varepsilon)$ qui fut le point de départ de toute cette histoire est de ce type : il suffit de poser $\theta = tx/\varepsilon$. Mais de nombreuses autres équations sont concernées [St3], en particulier les équations de la forme $x' = f(x, t, \frac{\alpha(x,t)}{\varepsilon} + \beta(x, t))$ lorsque la fonction f est périodique en sa troisième variable. Il suffit de poser $\theta = \alpha(x, t)/\varepsilon + \beta(x, t)$.

Mes premiers résultats liés à la moyennisation [St1] concernent l'équation (2). J'ai appliqué la stroboscopie dans le théorème KBM et ses généralisations [St2,St3], et j'ai pour cela étendu la méthode de stroboscopie à des situations où la suite des instants d'observation est obtenue par une 'recurrence externe' [St3]. J'ai appliqué aussi la stroboscopie pour obtenir le Lemme de l'Ombre Courte [St3], dans les sytèmes hamiltoniens à paramètres lentement variables et leurs perturbations [St3,St5], les solutions fantômes [St4], la propagation des erreurs dans les schémas numériques [St6] et le comportement à très long terme des solutions dans les sytèmes dynamiques [St7] : dans ce dernier travail j'ai proposé un Lemme de l'Ombre Longue et une notion de *prolongation d'orbite* qui m'a permis d'obtenir des approximations valables pour tout le temps dans les cas où les problèmes non perturbés ont des solutions asymptotiquement stables. Un article de synthèse [St8] dans ce volume présente quelque unes de ces applications.

Dans leur article sur l'Analyse non Standard dans l'*Encyclopedia Universalis*, Robert Lutz et Michel Goze [LG] ont indiqué comment la stroboscopie a permis d'obtenir des invariants adiabatiques.

Dans son article *L'intrusion de l'analyse non standard dans les perturbations singulières* publié dans les actes de la III^e Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Robert Lutz [L] a proposé une *stroboscopie selective* qui pourrait rendre de grands services dans les théorèmes du type presque-partout et dans les problèmes de résonnance.

Dans [CJL] S. N. Chow, E. M. de Jager et R. Lutz ont proposé une explication qualitative des solutions fantômes basée sur une équation différentielle singulièrement perturbée du troisième ordre et ont utilisé la méthode de stroboscopie pour analyser les solutions de cette équation.

Au congrès sur les Mathématiques Finitaires et l'Analyse non Standard, qui s'est tenu à Luminy en Mai 1985, plusieurs travaux utilisant la stroboscopie ont été présentés. Jean Louis Callot [C2] étudie les *Solutions visibles de l'Equation de Schrödinger*. Il considère l'équation $\varepsilon^2 y'' - \phi(x)y = 0$ qu'il analyse dans les puits de potentiels où la fonction ϕ est appréciablement négative. En utisant la méthode de stroboscopie, il montre que la quantité $A = \sqrt{-\phi}r^2$ où $r^2 = y^2 - (\varepsilon y')^2/\phi$ reste presque constante[7] . Claude Lobry et Guy Wallet [LW,W1] sont intéressés par des problèmes de bifurcation dynamique et de retard à la bifurcation. Ils mentionnent comment la stroboscopie permet de suivre les solutions et de trouver la fonction entrée sortie, renvoyant à l'article *Entrée-sortie dans un tourbillon* [W2] pour les calculs. Albert Troesch [T] s'intéresse à l'équation différentielle du troisième ordre $\varepsilon^2 y''' + k\varepsilon y'' + (y^2-1)y' + y = a$. Il met en évidence des régions d'oscillations dans lesquelles il analyse les solutions par la méthode de stroboscopie. Salvador Sanchez-Pedreño [S1] a étudié *certaines équations différentielles hautement non linéaires*, en particulier l'équation $x'' = (\delta + \sin\frac{x}{\varepsilon})^\omega$ où ω est infiniment grand et δ et ε sont infiniment petits. Il montre par stroboscopie que les ombres des solutions dans l'espace des phases $(x, y = x')$ sont, selon les valeurs de ω, des droites $y =$ cte ou des paraboles $y^2 = Kx+$ cte où K est une constante bien déterminée. Cette étude a été reprise et systématisée par l'auteur dans [S2]. Emile Urlacher [U] modélise *l'état mathématique d'un auditeur d'une conférence de mathématiques* par un système rapidement oscillant. Il est conduit à un champ lent-rapide avec une 'courbe lente épaissie'. Il utilise la stroboscopie pour l'étude de l'évolution du système le long de cette 'courbe lente'.

Nadir Sari et Bruno Schmitt [Sn1-Sn4,SS] dans leurs études des oscillations non linéaires lentement forcées du type $x'' + g(x) = h(\varepsilon t)$ ont utilisé la stroboscopie pour obtenir les invariants adiabatiques de ces équations, pour calculer le nombre de tours et localiser ainsi des solutions périodiques, et pour approximer les solutions de très grande amplitude.

Hubert Holin [H1-H5] a employé la stroboscopie pour analyser des images, de cercles en particulier, obtenues par le calcul en nombres entiers de Reeb.

Augustin Fruchard [F] a déterminé par stroboscopie des fonctions entrée-sortie pour des canards discrets.

Marc Diener [D] a présenté la méthode de stroboscopie à l'école d'été Analyse non Standard et Représentation du Réel aux Andalouses (Oran) en 1984 et en a proposé comme application une preuve originale du théorème de De Moivre-Laplace selon lequel la distribution binomiale tend à devenir une loi normale. Imme van den Berg [B] a obtenu aussi par stroboscopie une forme plus générale de ce théorème central-limite.

Francine et Marc Diener [DD] ont étudié des champs lent-rapides pour lesquels la dynamique rapide admet des cycles. Il obtiennent l'évolution des variables lentes le long de ces cycles par stroboscopie. La méthode s'applique aussi dans des champs à trois (ou plus) echelles de temps et permet d'étudier la dérive (très lente) d'un cycle limite lent-rapide. J'ai pu déterminer ainsi [St9] l'évolution de la densité du superprédateur dans une chaine alimentaire du type proie-prédateur-superprédateur, présentant des cycles lent-rapides de la proie et du prédateur.

Remarque. On m'a "expliqué" quelquefois que l'idée de stroboscopie est ancienne et que ce n'était pas très intelligent d'en faire toute une affaire. C'est vrai que l'invention de l'idée de *stroboscopie* appliquée aux systèmes différentiels [avec des

[7]Ce n'est rien d'autre que l'invariance adiabatique du rapport de l'énérgie à la fréquence puisque $A = -2E/\sqrt{-\phi}$ où $E = \ (\varepsilon y')^2 - \phi y^2\ /2$ est l'énergie. Plutôt que d'essayer de ramener ses problèmes à quelque théorie bien connue, je recommande vivement au lecteur de suivre l'exemple de Jean Louis Callot et de jouer avec la stroboscopie à chaque fois que l'occasion se présente.

espacements $t_{n+1} - t_n$ *très réguliers*] remonte à Minorski [M1,M2,Hf] et qu'elle a connu quelque fortune. Mais pour cet auteur il s'agit seulement d'observer une oscillation x(t) en des instants réguliers t_n et de se ramener ainsi à l'itération d'une application. Ses instants t_n sont des multiples de 2π, et aucune hypothèse sur le taux d'accroissement $\frac{x(t_{n+1})-x(t_n)}{t_{n+1}-t_n}$ n'est envisageable.

L'un des objectifs de cette petite retrospective était de convaincre le lecteur que la stroboscopie n'est pas la méthode effectivement mise en oeuvre par l'asymptotique classique, qu'elle ne se résume pas seuleument à la convergence du schéma d'Euler et qu'elle n'a aucune contrepartie sérieuse dans la littérature classique : il s'agit bien entendu de la contrepartie d'un énoncé précis de stroboscopie, par exemple le Theorem 1 de l'article *Stroboscopy and Averaging* dans ce volume. Je pense avoir atteint cet objectif puisque j'ai montré des applications variées et nombreuses de la stroboscopie qui relevent classiquement de chapitres très distincts des mathématiques.

References

[B] I. P. van den Berg, *An External Probability Order Theorem with some Applications*, in F. and M. Diener, editors, Nonstandard Analysis in Practice, Universitext, Springer (to appear).

[C1] J.L. Callot, *Bifurcations du portrait de phase pour des équations différentielles ayant pour type l'équation d'Hermite*, Thèse, Université de Strasbourg, 1981.

[C2] J.L. Callot, *Solutions visibles de l'équation de Schrödinger*, in M. Diener at G. Wallet, éditeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard, Luminy 1985, Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7 **31 :2** (1989), 105-109.

[CS] J.L. Callot et T. Sari, *Stroboscopie infinitésimale et moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes*, in Landau I. D., éditeur, Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des sytèmes et le traitement du signal, tome 3, Editions du CNRS (1983), 345-353.

[CJL] S.N. Chow, E.M. de Jager and R. Lutz, *The Ghost solutions of the logistic equation and a singular perturbation problem*, Advances in Computational Methods for boundary layers and interior layers, Dublin (1984), 15-20.

[D] M. Diener, *Une initiation aux outils non standard fondamentaux*, in M. Diener et C. Lobry, éditeurs, Analyse nonstandard et représentation du reel, Editions CNRS (Paris)/OPU (Alger) (1985), 9-71.

[DD] F. Diener et M. Diener, *Canards et Fleuves*, Cours de DEA, Université de Nice (1990).

[F] A. Fruchard, *Canards discrets*, C. R. Acad. Sci. Paris **307, Série I** (1988), 41-46.

[H1] H. Holin, *Harthong-Reeb Circles*, Université de Paris 7, séminaire non standard (89/2).

[H2] H. Holin, *Sun and Filigrees*, Université de Paris 7, séminaire non standard (90/1).

[H3] H. Holin, *Moyennisation spaciale et supports pixélisés*, Thèse, Université de Paris 7 (1991).

[H4] H. Holin, *Harthong-Reeb analysis and digital circles*, The Visual Computer, an International Journal of Computer Graphics **8-1** (1991), 8-17.

[H5] H. Holin, *Some artefacts of integer-computed circles*, Actes de la 19ème Ecole de Printemps d'Informatique Théorique (to appear).

[Hf] F. C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, Applied Mathematical Sciences **94** (1993), Springer Verlag, New York, Berlin.

[L] R. Lutz, *L'intrusion de l'Analyse non standard dans l'étude des perturbations singulières*, in III^e Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Volume 2, Astérisque **107-108** (1983), 101-140.

[LG] R. Lutz et M. Goze, *Analyse non standard*, Encyclopedia Universalis (1985).

[M1] N. N. Minorsky, *Nonlinear Oscillations* (1962), Van Nostrand, Princeton.

[M2] N. N. Minorsky, *Théorie des oscillations*, Memorial des Sciences Mathématiques **163** (1967), Gauthiers Villars, Paris.

[R] G. Reeb, *Equations différentielles et analyse non classique (d'après J.L. Callot)*, Proceedings of the 4th International Colloquium on Differential Geometry (1978), Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostella (1979), 240-245.

[S1] S.G. Sanchez-Pedreño, *Sur certaines équations différentielles hautement non linéaires*, in M. Diener et G. Wallet, éditeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard, Luminy 1985, Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7 **31 :2** (1989), 133-152.

[S2] S.G. Sanchez-Pedreño, *Phase-Space Analysis of a Nonoscillatory 'Highly Nonlinear' Boundary Value Problem*, Jour. of Math. Analysis and Appl. **174-1** (1993), 153-177.

[Sn1] N. Sari, *Etude qualitative de l'équation du pendule simple forcé. Recherche de solutions périodiques symétriques*, Thèse de 3^o cycle, Université de Strasbourg, Publication IRMA **228/T3-43** (1984).

[Sn2] N. Sari, *Sur l'équation du pendule simple forcé*, in M. Diener et C. Lobry, éditeurs, Analyse nonstandard et représentation du reel, Editions CNRS (Paris)/OPU (Alger) (1985), 103-110.

[Sn3] N. Sari, *Oscillations non linéaires avec symétries, périodiquement et lentement forcées*, Thèse, Université de Mulhouse, 1994.

[Sn4] N. Sari, *Oscillations non linéaires avec symétries, périodiquement et lentement forcées*, Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique (to appear).

[SS] N. Sari et B. V. Schmitt, *Oscillations lentement forcées du pendule simple*, Jour. of Appl. Math. and Physics (ZAMP) **14** (1990), 480-500.

[St1] T. Sari, *Sur une équation différentielle à solutions rapidement oscillantes*, Publication IRMA **222/S-07** (1983), 40-51.

[St2] T. Sari, *Sur la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires*, in III^e Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Volume 2, Astérisque **109-110** (1983), 141-158.

[St3] T. Sari, *Moyennisation dans les systèmes différentiels à solutions rapidement oscillantes*, Thèse, Université de Mulhouse, 1983.

[St4] T. Sari, *Sur les solutions fantômes associées à certaines équations différentielles*, Cahiers Math. Univ. d'Oran **2** (1986), 1-13.

[St5] T. Sari, *Systèmes hamiltoniens à paramètres lentement variables*, Cahiers Math. Univ. d'Oran **3** (1987), 113-131.

[St6] T. Sari, *Stroboscopy and Averaging*, Research Memorandum nr. 285, Faculty of Economics, University of Groningen, 1988.

[St7] T. Sari, *Stroboscopy and Long Time Behaviour in Dynamical Systems*, Research Memorandum nr. 286, Faculty of Economics, University of Groningen, 1988.

[St8] T. Sari, *Stroboscopy and Averaging*, ce volume.

[St9] T. Sari, *Oscillations lentes rapides dans des chaines alimentaires à trois populations*, Proceedings of the 2nd ECMBM – Lyon (1993).

[T] A. Troesch, *Lorsque les canards naissent dans les tourbillons*, in M. Diener et G. Wallet, éditeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard, Luminy 1985, Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7 **31 :2** (1989), 67-90.

[U] E. Urlacher, *Un système rapidement oscillant*, in M. Diener et G. Wallet, éditeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard, Luminy 1985, Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7 **31 :2** (1989), 235-256.

[W1] G. Wallet, *Dérive lente d'un champ de Lienard*, in M. Diener et G. Wallet, éditeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse non Standard, Luminy 1985, Publications Mathématiques de l'Université de Paris 7 **31 :1** (1989), 53-66.

[W2] G. Wallet, *Entrée-sortie dans un tourbillon*, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 157-184.

Laboratoire de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace, 4 rue des Frères Lumière, F 68093 Mulhouse cedex, France

E-mail address: T.Sari@univ-mulhouse.fr